EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

OFFICIEEL ORGAAN VAN LIWENAGEL EN VAN WIMECOS

17e JAARGANG 1941

Nr. 4

Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—.
Voor intekenaars op het Nieuw
Tijdschrift v. Wiskunde f 5.—.

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijkse afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang *f* 6,—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6,—) zijn ingetekend, betalen *f* 5,—.

De leden van Liwenagel (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en Wimecos (Vereniging van leraren in de wiskunde, mechanica en de cosmographie aan H.B.S. 5-j. c. B, lycea en meisjes H.B.S. 5—6 j. c.) krijgen Euclides toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van Liwenagel storten de abonnementskosten ten bedrage van *f* 1,75 op de postgirorekening no. 8100 van Dr. C. de Jong te Leiden. De leden van Wimecos storten hun contributie van *f* 2,75 (waarin de abonnementskosten op Euclides begrepen zijn) op de postgirorekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam. De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 6593 van de Firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van Liwenagel of Wimecos. Deze bedragen *f* 5,— per jaar franco per post.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

dit midden heeft echter tot coordinaten $\frac{x_1 - y_1}{2}, \ldots, \frac{x_n - y_n}{2}$ en is dus een *roosterpunt* $\neq O$.

Stelling 1 is derhalve aangetoond, zoodra bewezen is:

S t e l l i n g 2. *In elk lichaam* L *in* R_n *met inhoud* $I > 2^n$ *ligt tenminste één paar verschillende punten* $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ *zoodanig dat het punt* $X - Y = (x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n)$ *een roosterpunt is met louter even coordinaten.*

O p m e r k i n g. Zooals vanzelf spreekt, behoeft het punt X — Y niet in L te liggen. Men lette er op, dat de voorwaarden van stelling 2 zeer ruim zijn en dat de eischen der convexiteit en der symmetrie om O vervallen zijn.

B e w ij s v a n s t e l l i n g 2. Ik vermenigvuldig L van den oorsprong uit met den factor ½; het ontstane lichaam ½ L heeft dan den inhoud $\frac{1}{2^n} I > 1$. Ik behoef blijkbaar slechts aan te toonen, dat dit lichaam ½ L twee punten U en V bevat waarvoor U — V een roosterpunt is: door terugvermenigvuldigen toch met den factor 2 gaan U en V over in punten X en Y van L, waarvan alle coordinaten twee maal zoo groot zijn als die van U en V en gaat U — V over in X — Y, dat derhalve een roosterpunt voorstelt met even coordinaten.

Zij thans m een natuurlijk getal. Ik beschouw dan voor vaste m het rooster aller punten $P = \left(\frac{w_1}{m}, \ldots, \frac{w_n}{m}\right)$, waar w_ν (voor $\nu = 1, 2, \ldots, n$) de geheele getallen doorloopt. Door dit rooster wordt R_n blijkbaar in congruente parallelepipeda p met inhoud $\frac{1}{m^n}$ verdeeld. Aan ieder dier p voegen we ondubbelzinnig omkeerbaar een zijner hoekpunten P toe (bijvoorbeeld dat hoekpunt, dat we naar analogie van het geval $n = 2$ als den „Zuid-Westhoek" van p kunnen aanduiden). Zij A_m het aantal der parallelepipeda p, die *geheel* binnen ½ L vallen; deze hebben een gezamenlijken inhoud $= A_m \cdot \frac{1}{m^n}$. Wegens de definitie van het begrip inhoud geldt dus:

$$A_m \cdot \frac{1}{m^n} \rightarrow \frac{1}{2^n} I (>1) \text{ voor } m \rightarrow \infty$$

en dus bij zekere $m_0 \geqq 1$ voor alle $m \geqq m_0$

$$A_m > m^n, \text{ dus } A_m \geqq m^n + 1.$$

We kiezen $m = m_0$ en kunnen dus beweren, dat het aantal $B_{m_0} \geqq A_{m_0}$ der punten $P = \left(\frac{w_1}{m_0}, \ldots, \frac{w_n}{m_0}\right)$ met geheele $w_1, \ldots, w_n$, die binnen $\frac{1}{2}$ L liggen, $\geqq A_{m_0}$ en dus $\geqq m_0^n + 1$ is. Iedere w_ν laat echter bij deeling door m_0 één en precies één der m_0 mogelijke resten $0, 1, \ldots, m_0 - 1$ na, zoodat wij ten aanzien van de waarden die de gebroken deelen hunner coordinaten bezitten, de punten $\left(\frac{w_1}{m_0}, \ldots, \frac{w_n}{m_0}\right)$ in precies m_0^n klassen kunnen onderscheiden. Tenminste 2 verschillende der $B_{m_0} \geqq m_0^n + 1$ punten P uit $\frac{1}{2}$ L behooren dus tot één en eenzelfde dezer klassen. Noemen we deze punten U en V, dan is dus U — V een roosterpunt $\neq$ O. Q. e.d.

Ten aanzien van dit bewijs maken we allereerst de opmerking, dat zijn zwaartepunt ongetwijfeld ligt in het gebruik van de zoogenaamde *ladenmethode* van D i r i c h l e t (slot van het bewijs van stelling 2): *liggen* N + 1 *voorwerpen in* N *laatjes, dan bevat minstens één laatje minstens twee dier voorwerpen.* Het bewijs krijgt daardoor een zuiver rekenkundig karakter. M i n k o w s k i 's oorspronkelijk bewijs gaat heel anders, is meer meetkundig.

Stelling 2 komt bij M i n k o w s k i niet voor: hij beperkt zich steeds en onmiddellijk tot *convexe lichamen* waaraan het feit, dat zijn werk zijn uitgangspunt nam in de studie der quadratische vormen en zich van daar uit langzamerhand generaliseerde, niet vreemd zal zijn.

De expliciete formuleering van stelling 2 is echter gewichtig, omdat in deze stelling, zooals wij reeds opmerkten, de eischen der convexiteit en symmetrie ontbreken: het resultaat van stelling 2 berust derhalve alleen op de eigenschappen van het rooster en van het inhoudsbegrip; hoe de voorwaarden der convexiteit en symmetrie dan toch tenslotte nog noodig zijn om tot de volle stelling 1 van M i n k o w s k i te komen, blijkt genoegzaam uit bovenstaande afleiding van stelling 1 uit stelling 2. Dit inzicht hadden voor het eerst B l i c h f e l d t en S c h e r r e r, die onafhankelijk van elkaar onderling verschillende bewijzen van stelling 1 gaven [1]) en dezelfde

[1]) Lit. in Kap. II van K. DA.

gedachte vinden wij in de latere bewijzen van Hajós en Mordell.[1]) Tevens echter leverde het inzicht in dezen samenhang den weg tot verschillende generalisaties der stellingen 1 en 2. Deze generalisaties betreffen zoowel het begrip *roosterpunt* (Blichfeldt[1]), Remak[1]), Visser[2])), als de begrippen *convex* (Mordell[1]), van der Corput[1])) en *inhoud*[3]) (Jessen[4]), Fenchel[4]), Visser[2])).

2. Door toepassing van stelling 2 met uitdrukkelijke gebruikmaking van het feit, dat L niet convex behoeft te zijn, gelukte het eenige maanden geleden Davenport, een zeer kort en doorzichtig bewijs te geven[5]) van de volgende stelling 3 van Minkowski, die een verscherping is van stelling 1 en wier uiterst moeizaam oorspronkelijk bewijs bij Minkowski vele bladzijden in beslag neemt.[6])

Stelling 3. *Zij* K *een convex lichaam in* R_n *met middelpunt* O. *Van* O *uit vermenigvuldige men* K *met een factor* $\lambda_1 > 0$ *zoodanig, dat binnen* K *geen roosterpunt behalve* O, *doch op den rand minstens* 1 *roosterpunt, bijv.* P_1, *ligt. Men late door vermenigvuldiging uit* O *dit lichaam* λ_1 K *zoover uitzetten tot het verkregen lichaam* λ_2 K *ten eersten male tegen een roosterpunt, bijv.* P_2, *stoot, dat niet op de rechte* OP_1 *ligt; daarna vermenigvuldige men verder tot het dan verkregen lichaam* λ_3 K *ten eersten male tegen een roosterpunt, bijv.* P_3, *stoot, dat niet in het platte vlak* OP_1P_2 *ligt enz. Tenslotte krijgt men een met* K *gelijkvormig lichaam* λ_n K *op welks rand een roosterpunt* P_n *ligt, dat niet met de roosterpunten*

---

1) Lit. in Kap. II K. DA.

2) C. Visser, Over een stelling in de Geometrie der Zahlen. Handel. van het 27e Ned. Nat. Geneesk. Congres 1939, blz. 84—85.

3) Zooals uit het voorgaande blijkt heb ik onder „inhoud" stilzwijgend den inhoud volgens Jordan verstaan. Men kan echter dit begrip generaliseeren door bijv. de maattheorie volgens Lebesgue in te voeren.

4) W. Fenchel, Verallgemeinerungen einiger Sätze aus der Geometrie der Zahlen. Acta Arithmetica 2 (1937), 230—241.

5) H. Davenport, Minkowski's inequality for the minima associated with a convex body. Quart. Journal Math., Oxford Ser. 10 (1939) 119—121.

Voor het bewijs van Davenport, zie aldaar.

6) Zie G. d. Z., blz. 172 en vervolgens.

$O, P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ *in één* R_{n-1} *ligt, terwijl binnen* λ_n K *geen andere roosterpunten liggen dan zulke, die in de door* $O, P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ *bepaalde* R_{n-1} *liggen. Blijkbaar geldt* $0 < \lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \ldots \leqq \lambda_n$.

Bewering: *Is* V *het volume van* K, *dan geldt*

(1) $$\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n V \leqq 2^n.$$

Opmerkingen:

1. Het is niet uitgesloten, dat $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n$ is.

2. Men kan stelling 1 ook zoo uitspreken: een convex lichaam K met middelpunt in O, dat in zijn binnenste geen ander roosterpunt bevat dan O, heeft een inhoud $\leqq 2^n$. Definieert men nu K, λ_1 en V zooals in stelling 3 is geschied, dan is de inhoud van λ_1 K gelijk aan λ_1^n V en men ziet in, dat stelling 1 aequivalent is met de ongelijkheid

(2) $$\lambda_1^n V \leqq 2^n.$$

Nu volgt (2) onmiddellijk uit (1) wegens $\lambda_2 \geqq \lambda_1, \ldots, \lambda_n \geqq \lambda_1$. Maar omgekeerd is (1) niet in (2) bevat.

3. Stelling 3 speelt een voorname rol bij de afleiding van Minkowski's beroemde arithmetische kriterium voor de algebraische getallen van den graad n.[1])

3. We maken thans een toepassing van stelling 1 en wel voor $n = 2$. In het platte vlak beschouwen we voor reëele α de rechte $y = \alpha x$. Er liggen op deze rechte dan en slechts dan roosterpunten $\neq (0,0)$ als α rationaal is. We willen echter onderzoeken, of er roosterpunten in hare nabijheid liggen en beschouwen de strook

$$-\frac{1}{t} < \alpha x - y < \frac{1}{t} \qquad (t \geqq 1),$$

begrensd door de beide rechten $y = \alpha x \pm \frac{1}{t}$. We sluiten deze strook af door de rechten $x = \pm \tau$, zoodat we een parallelogram krijgen met middelpunt O en inhoud $\frac{4\tau}{t}$ $(\tau \geqq 1)$. Voor $\tau > t$ bevat het open parallelogram dus volgens stelling 1 minstens 1 roosterpunt $(x, y) \neq (0,0)$; wegens $t \geqq 1$ geldt echter zeker $x \neq 0$ en daar

1) Een eenvoudiger afleiding van bedoeld kriterium bij N. Pipping, Zur Theorie der arithmetischen Kriterien für die reellen algebraischen Zahlen. Diss. Helsingfors 1917. Verdere lit. in K. DA., Kap. II, IV.

ook $(-x, -y)$ binnen het parallelogram ligt, mag zelfs $x \geqq 1$ worden verondersteld. We hebben dus voor iedere $\tau > t$ een roosterpunt (x, y) met

$$1 \leqq x < \tau, \; | \alpha x - y | < \frac{1}{t}.$$

Omdat anderzijds slechts een eindig aantal roosterpunten (x, y) aan deze betrekkingen voldoet (= binnen het bedoelde parallelogram ligt), geldt (we laten $\tau \to t$):

Stelling 4. *Is α reëel, $t \geqq 1$, dan is er minstens één paar geheele getallen x, y met*

$$1 \leqq x \leqq t, \; | \alpha x - y | < \frac{1}{t}.$$

Deze stelling, die op andere wijze door Dirichlet werd bewezen, is zeer fundamenteel. Zooals is aangetoond,[1] zijn in haar alle bekende stellingen over de approximatie van een reëel getal door rationale getallen, bevat.

4. Toepassing van stelling 1 voor algemeene $n \geqq 2$ levert o.a. de volgende beroemde „Linearformensatz" van Minkowski.

Stelling 5. *Zijn $\xi_\nu = a_{\nu 1} x_1 + a_{\nu 2} x_2 + \ldots + a_{\nu n} x_n$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) n homogene lineaire vormen in de n veranderlijken $x_1, \ldots, x_n$ met willekeurige reëele coefficienten $a_{\nu\mu}$, wier determinant $\Delta = | a_{\nu\mu} | \neq 0$ is en zijn $t_1, t_2, \ldots, t_n$ positieve getallen met $| \Delta | = t_1 \, t_2 \ldots t_n$, dan is voor minstens één roosterpunt $(x_1, \ldots, x_n) \neq (0, \ldots, 0)$*

(3) $$| \xi_1 \, \xi_2 \ldots \xi_n | < | \Delta |,$$

zelfs

(4) $$| \xi_1 | \leqq t_1, \; | \xi_2 | < t_2, \ldots, | \xi_n | < t_n.$$

---

[1]) Zie mijn artikel: „Ueber einen Dirichlet-Minkowskischen Approximationssatz" in Mathematica (Zutphen) 6 (B) (1937), blz. 113—131; 171—181.

Vgl. de meetkunde van het lijnenpaar, zooals die is ontwikkeld door Minkowski in G. d. Z., blz. 147 en vervolgens.

Ik gebruik deze gelegenheid om een storende drukfout in mijn hiergenoemd artikel te verbeteren: op blz. 116 zijn in formule (2) de absoluut-strepen uitgevallen. Men leze

(2) $$1 \leqq x \leqq t, \; 0 < | \alpha x - y | \leqq \frac{1}{t}.$$

B e w ij s v a n s t e l l i n g 5. Blijkbaar volgt (3) uit (4). Om (4) aan te toonen, merken wij op, dat de n vormen

$$\frac{\xi_\nu}{t_\nu} = a'_{\nu 1}x_1 + \ldots + a'_{\nu n}x_n \; (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

de determinant $\Delta' = \pm 1$ hebben. De $2n$ hypervlakken

$$a'_{\nu 1}x_1 + \ldots + a'_{\nu n}x_n = \pm 1 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

begrenzen een parallelepipedum, dat blijkbaar 0 tot middelpunt heeft en dat wegens $|\Delta'| = 1$ het volumen 2^n bezit. Daarom ligt voor iedere $t > 1$ wegens stelling 1 minstens 1 roosterpunt $(x_1, \ldots, x_n) \neq (0, \ldots, 0)$ binnen het open parallelepipedum

$$\left|\frac{\xi_1}{t_1}\right| < t, \left|\frac{\xi_2}{t_2}\right| < 1, \ldots, \left|\frac{\xi_n}{t_n}\right| < 1.$$

Anderzijds echter liggen binnen dit parallelepipedum hoogstens een eindig aantal roosterpunten, zoodat voor $t \to 1$ de bewering volgt.

O p m e r k i n g 1. Door verwisseling der vormen kan men blijkbaar iedere ξ_ν van het systeem tot eersten vorm ξ_1 kiezen. Deze opmerking is van belang, omdat in (4) alleen in de eerste ongelijkheid het teeken $=$ voorkomt. De vraag rijst: wanneer kan men ook daar het teeken $=$ weglaten? Of, in het licht van bovenstaand bewijs van stelling 5: Wanneer vertoont een vormensysteem

$$\xi'_\nu = a'_{\nu 1}x_1 + \ldots + a'_{\nu n}x_n \; (\nu = 1, 2, \ldots, n) \text{ met } \Delta' = |a'_{\nu\mu}| = \pm 1$$

het merkwaardige grensgeval, dat voor *ieder* roosterpunt $(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$ minstens één der vormen absoluut $\geqq 1$ is?

Een beroemd vermoeden van M i n k o w s k i nu spreekt uit, dat voor het optreden van dit grensgeval noodzakelijk is, dat minstens één der vormen ξ'_ν louter geheele coefficienten heeft en dan nog wel met grootsten gemeenen deeler 1. Over de juistheid van dit vermoeden is voor $n > 7$ *niets* bekend.[1]) Bij de verschillende mislukte pogingen dit probleem op te lossen wisselen meetkundige, rekenkundige en analytische methoden elkaar af.

O p m e r k i n g 2. Van stelling 5 bestaan verschillende bewijzen.[1]) De stelling is met het oog op vele toepassingen zeer belang-

---

[1]) Lit. in K. DA., Kap II. Zie verder de voordracht van L. J. M o r d e l l, Minkowski's theorems and hypotheses on linear forms. C. R. du Congrès Int. des mathématiciens, Oslo 1936, 226—238.

rijk. Zoo bevat zij meerdimensionale analoga van stelling 4, o.a. over de simultane approximatie [1]) van n reëele getallen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ door gelijknamige breuksystemen $\left(\frac{y_1}{x}, \ldots, \frac{y_n}{x}\right)$; Minkowski bewees met haar hulp o.a. zijn beroemde stelling over de discriminante van een algebraisch getallenlichaam. [2])

5. Wij keeren nog eens naar formule (3) van stelling 5 terug. Minkowski heeft een analoge bewering uitgesproken voor *inhomogene* vormen:

Stelling(?) 6. *Zijn* $\xi_\nu = a_{\nu 1}x_1 + \ldots + a_{\nu n}x_n$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ *homogene lineaire vormen met reëele coefficienten en determinant* $\Delta = |a_{\nu\mu}| \neq 0$ *en zijn* $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *willekeurige reëele getallen* $(n \geqq 2)$, *dan bestaat er minstens één roosterpunt* $(x_1, \ldots, x_n)$, *waarvoor geldt*

$$(5) \qquad |(\xi_1 - b_1)(\xi_2 - b_2) \ldots (\xi_n - b_n)| \leqq \frac{|\Delta|}{2^n} .$$

Het rechterlid van (5) is aanmerkelijk kleiner dan dat van (3), maar toch levert (5) in het homogene geval, $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$ niets op ter verscherping der bewering (3), want in stelling 6 is niet als in stelling 5 de restrictie $(x_1, \ldots, x_n) \neq (0, \ldots, 0)$ gemaakt, zoodat het niet uitgesloten is, dat het door stelling 6 te leveren roosterpunt juist O is.

Intusschen, stelling 6 is nog slechts bewezen voor $n = 2$ (Minkowski) en $n = 3$ (Remak); voor de overige $n \geqq 4$ staat ze bekend als het vermoeden van Minkowski over het product der inhomogene lineaire vormen. Het bewijs van Remak voor $n = 3$ is dermate gecompliceerd, dat overdracht zijner methode op grootere n welhaast uitgesloten schijnt. [3])

Des te verrassender is het, dat de Rus Tschebotarew eenige jaren geleden een uitermate eenvoudig niet-meetkundig bewijs heeft geleverd van een stelling, die weliswaar niet het volle

---

[1]) G. d. Z., blz. 108. Lit. in K. DA., Kap V.
[2]) G. d. Z.,blz. 123 en vervolgens. Lit. in K. DA., Kap II.
[3]) Lit. betreffende dit alles in K. DA., Kap. II en in de op voorgaande bladzijde onder [1]) genoemde voordracht van Mordell.

vermoeden van M i n k o w s k i rechtvaardigt, maar de zaak toch een groote schrede vooruitbrengt. [1])

Gemakshalve duiden wij bij de volgende weergave van T s c h e b o t a r e w 's gedachtengang de waarde der vorm ξ_ν in het punt $X = (x_1, \ldots, x_n)$ met ξ_ν (X) aan. Dan is blijkbaar

$$(6) \qquad \xi_\nu (X + Y) = \xi_\nu (X) + \xi_\nu (Y).$$

We denken n, $a_{\nu\mu}$ en b_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$; $\mu = 1, 2 \ldots, n$) vast en beschouwen de onderste grens $\bar{\omega}$ van de uitdrukking

$$| (\xi_1 (X) - b_1) (\xi_2 (X) - b_2) \ldots (\xi_n(X) - b_n) | ,$$

als X de roosterpunten $\neq$ O van R_n doorloopt. Volgens de beteekenis van ω kunnen wij dus bij willekeurige $\delta > 0$ een roosterpunt $Z = (z_1, \ldots, z_n)$ met

$$(7) \qquad \omega \leqq | (\xi_1(Z) - b_1) \ldots (\xi_n (Z) - b_n) | \leqq \omega + \delta$$

kiezen; indien de onderste grens werkelijk wordt bereikt, kunnen we zelfs $\delta = 0$ kiezen. We houden het punt Z vast en merken op, dat wegens (6) en de definitie van ω voor *ieder* roosterpunt X geldt

$$\left| \prod_{\nu=1}^{n} (\xi_\nu(Z) + \xi_\nu (X) - b_\nu) \right| \geqq \omega \text{ en } \left| \prod_{\nu=1}^{n} (\xi_\nu (Z) - \xi_\nu (X) - b_\nu) \right| \geqq \omega,$$

dus, bij vermenigvuldiging

$$(8) \qquad \left| \prod_{\nu=1}^{n} \{\xi_\nu (Z) - b_\nu\}^2 - \{\xi_\nu (X)\}^2 \right| \geqq \omega^2.$$

Wij willen nu aantoonen, dat ω niet al te groot kan zijn. Dit zal ons gelukken door gebruik te maken van het feit, dat (7) en (8) gelijktijdig gelden, terwijl in (8) het roosterpunt X nog geheel willekeurig is. We nemen nu $\omega > 0$ aan, want uit $\omega = 0$ zou ruimschoots de bewering van stelling 6 volgen. Kortheidshalve stellen wij

$$(9) \qquad \tau_\nu = | \xi_\nu (Z) - b_\nu | ,$$

dan volgt uit (7) en (8) door deeling

$$(10) \qquad \left| \prod_{\nu=1}^{n} \left(1 - \frac{| \xi_\nu(X) |^2}{\tau_\nu^2}\right) \right| \geqq \left(\frac{\omega}{\omega + \delta}\right)^2,$$

---

[1]) N. T s c h e b o t a r e w, Algebraische-arithmetische opmerkingen. (Russisch met Duitsch uittreksel).
Utchenie Sapiski, Kasanskij G. Universitet, God Isdanie 100, Tom 94, Kniga 7. Matem. Wypusk 2 (1934), 3—16.

terwijl (7) den vorm

(11) $$\omega \leqq \tau_1 \tau_2 \dots \tau_n \leqq \omega + \delta$$

aanneemt.

Ter oriënteering nemen we een oogenblik aan, dat we in het boven reeds aangeduide geval $\delta = 0$ verkeeren. In dit geval luiden (10) en (11)

(12) $$\left| \prod_{\nu=1}^{n} \left(1 - \frac{| \xi_\nu (X) |^2}{\tau_\nu^2}\right) \right| \geqq 1.$$

(13) $$\tau_1 \tau_2 \dots \tau_n = \omega.$$

Indien we nu het roosterpunt $X \neq O$ eens zóó zouden kunnen kiezen, dat

$$| \xi_\nu |^2 < 2\tau_\nu^2 \, (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

ware, zou (12) een ongerijmdheid inhouden. Immers wegens $\triangle \neq 0$ kunnen niet alle $\xi_\nu (X) = 0$ zijn en dus zou het linkerlid van (12) < 1 zijn. De ongelijkheden $|\xi_\nu|^2 < 2\tau_\nu^2$, d. w. z. de ongelijkheden

$$| \xi_\nu | < \tau_\nu \sqrt{2} \, (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

echter worden volgens stelling 5 met $t_\nu = \tau_\nu \sqrt{2}$ inderdaad bevredigd door een roosterpunt $X \neq O$, indien maar

$$t_1 \, t_2 \dots t_n = \tau_1 \, \tau_2 \dots \tau_n \, (\sqrt{2})^n > | \triangle |$$

is. Wegens (13) leidt dus de ongelijkheid

(14) $$\omega > \frac{| \triangle |}{2^{n|2}}$$

tot een ongerijmdheid, zoodat zeker geldt

(15) $$\omega \leqq \frac{| \triangle |}{2^{n|2}} .$$

Intusschen, de aanname $\delta = 0$ wordt door niets gerechtvaardigd. We kunnen echter het resultaat (15) door een wat voorzichtiger redeneering ook afleiden in het algemeene geval, dus $\delta > 0$ aannemende:

Gesteld (15) geldt niet; dan is (14) waar en dus geldt

(16) $$\omega = \frac{| \triangle |}{2^{n|2}} . k^n \text{ voor zekere vaste } k > 1.$$

Wij beschouwen nu de n ongelijkheden

(17) $$| \xi_\nu | \leqq t_\nu \text{ met } t_\nu = \frac{\tau_\nu \sqrt{2}}{k} \, (\nu = 1, 2, \dots, n).$$

Deze hebben wegens $t_1 t_2 \ldots t_n = \tau_1 \tau_2 \ldots \tau_n \frac{2^{n/2}}{k^n} \geqq \omega \frac{2^{n/2}}{k^n}$ (zie (11)) en dus $\geqq |\triangle|$ (zie (16)) op grond van stelling 5 een oplossing $X = (x_1, \ldots, x_n) \neq O$ met geheele $x_1, \ldots, x_n$. Het kan zijn, dat ook $2X = (2x_1, \ldots, 2x_n)$ nog aan (17) voldoet. Zoo ja, dan kan het zijn dat ook $4X = (4x_1, \ldots, 4x_n)$ nog voldoet, maar daar in het door de ongelijkheden (17) bepaalde parallelepipedum hoogstens eindig vele roosterpunten liggen, kunnen we dit proces der vermenigvuldiging met 2 niet onbeperkt voortzetten. M. a. w., (17) heeft een oplossing $X' = (x_1', \ldots, x_n') \neq O$ met geheele $x_1', \ldots x_n'$, zoodanig dat $2X' = (2x_1', \ldots, 2x_n')$ geen oplossing van (17) is. Voor deze X' geldt dus bij minstens één waarde van ν de ongelijkheid

(18) $$|\xi_\nu(2X')| > t_\nu.$$

Zonder beperking der algemeenheid, kunnen we, eventueel na verwisseling van twee der ξ_ν, zorgen dat (18) geldt voor $\nu = 1$. Dan geldt wegens $\xi_1(2X') = 2\xi_1(X')$ en $t_1 = \frac{\tau_1\sqrt{2}}{k}$

(19) $$\frac{1}{2k^2} \leqq \frac{\{\xi_1(X')\}^2}{\tau_1^2} \leqq \frac{2}{k^2}$$

(het laatste teeken $\leqq$ geldt wegens (17) met $\nu = 1$, $X = X'$), terwijl wegens (17) (met $X = X'$) algemeen geldt

(20) $$\left|1 - \frac{\{\xi_\nu(X')\}^2}{\tau_\nu^2}\right| \leqq 1 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

We kunnen nu twee gevallen onderscheiden:

A) Zij $1 - \frac{\{\xi_1(X')\}^2}{\tau_1^2} \geqq 0$. Dan volgt uit (19)

$$\left|1 - \frac{\{\xi_1(X')\}^2}{\tau_1^2}\right| = 1 - \frac{\{\xi_1(X')\}^2}{\tau_1^2} \leqq 1 - \frac{1}{2k^2}$$

en dus wegens (20) en (10) (met $X = X'$):

(21) $$1 - \frac{1}{2k^2} \geqq \left(\frac{\omega}{\omega + \delta}\right)^2.$$

B) Zij $1 - \frac{\{\xi_1(X')\}^2}{\tau_1^2} < 0$, dus wegens (19)

$$\left|1 - \frac{\{\xi_1(X')\}^2}{\tau_1^2}\right| = \frac{\{\xi_1(X')\}^2}{\tau_1^2} - 1 \leqq \frac{2}{k^2} - 1$$

en dus wegens (20) en (10) (met X = X'):

$$(22) \qquad \frac{2}{k^2} - 1 \geqq \left(\frac{\omega}{\omega + \delta}\right)^2.$$

Nu is echter k een getal > 1, dat wegens (16) gelijk is aan

$$\sqrt{2}\,.\sqrt[n]{\frac{\omega}{|\Delta|}},$$

dus *vast,* en zeker van δ onafhankelijk is. Het getal δ echter kunnen we willekeurig dicht bij 0 gekozen denken. De linkerleden van (21) en (22) zijn dus vaste getallen < 1, terwijl de rechterleden van (21) en (22) net zoo dicht bij 1 liggen als we zelve verkiezen. Tegenspraak.

We hebben dus (15) inderdaad aangetoond en daarom geldt:

Stelling 7. *Zijn* $\xi_\nu = a_{\nu 1}x_1 + \ldots + a_{\nu n}x_n$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ *homogene vormen met determinant* $\Delta = |a_{\nu\mu}| \neq 0$ *en zijn* $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *willekeurige reëele getallen* $(n \geqq 2)$, *dan bestaat voor iedere vaste* $\varepsilon > 0$ *minstens een roosterpunt* $(x_1, \ldots, x_n)$, *waarvoor geldt*

$$|(\xi_1 - b_1)\ldots(\xi_n - b_n)| < \frac{|\Delta|}{2^{n/2}} + \varepsilon.$$

NASCHRIFT. Tusschen de tijdstippen van het afdrukken dezer voordracht in het congresverslag en het afdrukken in „Euclides" verscheen een Duitsche weergave van zijn bewijs door N. Tschebotarew: „Beweis des Minkowski'schen Satzes über lineare inhomogene Formen" Vjschr. naturf. Gesellsch. Zürich *85,* Beiblatt Nr. 32, 27—30 (1940), gevolgd door een merkwaardige verscherping door L. J. Mordell: Tschebotareff's theorem on the product of non-homogeneous linear forms, id., 47—50.

OFFICIËLE MEDEDELINGEN VAN WIMECOS.

In de op 30 December 1940 gehouden vergadering zijn achtereenvolgens de notulen van de vorige vergadering, het jaarverslag en de rekening van den Penningmeester goedgekeurd.

Voorzitter. Als Voorzitter werd de Heer Dr. J. Spijkerboer herkozen.

Contributie. Deze werd onveranderd vastgesteld op *f* 1,— plus *f* 1,75 voor het Orgaan Euclides. De contributie wordt in September a.s. geïnd.

Plaats voor de volgende Algemene vergadering. Aan het Bestuur is overgelaten, de plaats voor de volgende vergadering te bepalen.

Jaarverslag. Hieraan zij o.a. ontleend, dat de Vereniging op 31 Augustus 1940 één erelid en 224 gewone leden telde. De wijziging der Statuten is Koninklijk goedgekeurd. Wat de Methodiek der Wiskunde aangaat, wordt opgemerkt, dat hier besprekingen plaats hebben gevonden tussen hen, die naar de mening van het Bestuur in de eerste plaats in aanmerking kwamen, om hun medewerking te verlenen. De oorlog deed echter alles stagneren. De laatste tijd worden echter weer pogingen aangewend, om de zaak op gang te brengen. Het behoeft geen betoog, dat het Bestuur alles zal doen, om deze kwestie tot een bevredigend einde te brengen. Verder wordt in het Jaarverslag gewag gemaakt van een toenemende belangstelling van de Wiskundeleraren voor de didactische zijde van het Wiskundeonderwijs. Het Orgaan Euclides staat voor ieder, die het goed meent met het Wiskundeonderwijs, open voor opbouwende critiek. De wens wordt uitgesproken, dat ook de Inspectie en het Hooger Onderwijs zich niet onbetuigd zullen laten. De Vereniging heeft overigens van beide zijden niet over gebrek aan belangstelling te klagen.

De Secretaris van Wimecos
J. J. Tekelenburg.

HET MIDDELBAAR ONDERWIJS, IN HET BIJZONDER HET WISKUNDEONDERWIJS OP DE H.B.S. (B), BEZIEN VAN DEN KANT VAN HET HOOGER ONDERWIJS

DOOR

Prof. Dr. H. BREMEKAMP.

M.H.

In de eerste plaats wil ik Uw bestuur danken voor de gelegenheid, die het mij heeft geboden, voor U te spreken over een onderwerp, dat mij zeer ter harte gaat. Verwacht U van mij echter niet een wetenschappelijke, doorwrochte, stevig gedocumenteerde behandeling van de richtlijnen, die men bij het opstellen van een leerplan voor het middelbaar onderwijs behoort te volgen en van de wijze, waarop men dat in détails zou moeten uitvoeren, om de leerlingen zoo goed mogelijk voor het hooger onderwijs voor te bereiden. Mijn bedoeling is, U op eenigszins gemoedelijke wijze, een op waarnemingen gegrond oordeel te doen kennen over de resultaten van het middelbaar onderwijs, gevormd door iemand, die gelegenheid heeft gehad, de hier ter sprake komende problemen van beide kanten te bezien. Ik mag U echter niet verhelen, dat vele anderen een dergelijk oordeel veel dringender en veel heftiger naar voren brengen.

Toch vrees ik, dat, als over deze causerie met enkele woorden in de couranten wordt gewag gemaakt, menigeen die zoo'n persverslag leest zal denken, „jongen, jongen, het middelbaar onderwijs heeft er weer van langs gehad." Laat mij daarom beginnen met te verklaren, dat ik het middelbaar onderwijs een goed hart toedraag en dat ik innig overtuigd ben, dat het middelbaar onderwijs, ik bedoel in het bijzonder ons Nederlandsch middelbaar onderwijs dat ook verdient. Ik begrijp echter ook, dat Uw bestuur mij niet heeft uitgenoodigd, voor U te spreken, om deze verklaring te hooren, maar veeleer om *nog eens weer* van een insider te vernemen,

wat bij het hooger onderwijs de klachten zijn. „Nog eens weer”. Inderdaad zijn reeds herhaaldelijk en vooral in de laatste jaren klachten gehoord. Ik herinner aan het adres van de interacademiale commissie in begin 1933 en een jaar later de nog steeds lezenswaardige oratie van prof. Dr. J. G. Rutgers. Ook nu in September j.l. heeft de tegenwoordige rector der technische hoogeschool, prof. Dr. C. J. van Nieuwenburg dat onderwerp ter sprake gebracht in de rede, waarin hij verslag gaf van de lotgevallen der Technische Hoogeschool in het studiejaar 1939—’40. „Laat ons bovenal er naar streven” zegt hij „al datgene te doen en te bevorderen, wat kan leiden tot een verbetering van het gehalte van onze aankomende studenten. Daar schuilt de wortel van het kwaad. Wij worden in stijgende mate overstroomd door studenten, van wie een bedenkelijk hoog percentage te eenenmale ongeschikt is voor academische vorming, die een onderscheiding behoort te zijn; lieden, die daarvoor en de intelligentie en, wat veel belangrijker is, de beschaving missen.” U zult misschien denken, intelligentie is grootendeels een quaestie van aanleg en beschaving wordt niet alleen op school maar nog meer door de opvoeding in het gezin verkregen, deze opmerkingen gaan dus buiten ons om. Iets dergelijks zoudt U kunnen halen uit het bovengenoemde adres, dat voor een groot deel de oorzaak der klachten zoekt in het tweeledig karakter der H.B.S., die nl. eenerzijds opleidt voor verschillende maatschappelijke betrekkingen, anderzijds voorbereidt voor het hooger onderwijs. Inderdaad is dit laatste een euvel, dat U niet kunt wegnemen. Het moet, dunkt mij, als een verdienste van de in het laatste voorjaar bekend gemaakte regeeringsplannen ter hervorming van het voorbereidend hooger onderwijs gezien worden, dat daaraan een eind zou worden gemaakt. Maar ook zooals de toestand nu is, moogt U m.i. een opmerking als van den Delftschen rector magnificus niet zonder meer naast U neerleggen. Was de H.B.S. een inrichting, alleen bedoeld ter opleiding voor het hooger onderwijs, dan was dat in nog sterkere mate het geval.

Vroeger was de toestand zoo, dat het corps leeraren eener school, het zijn taak kon achten, van de eenmaal toegelaten leerlingen een zoo groot mogelijk deel door de school heen te helpen. Ik geloof, dat vele leeraren nog steeds zoo hun plicht opvatten en met een toewijding, die, als men dat standpunt eenmaal aanvaard heeft, allen lof verdient, naar de vervulling van dien plicht streven.

Ik geloof echter, dat deze opvatting niet meer de juiste is. Laten we ons een oogenblik indenken in een toestand, zooals de heer Bolkestein bij het ontwerpen der bovengenoemde plannen voor oogen had, dat wij dus te doen zouden hebben met een onderwijsinrichting uitsluitend tot voorbereiding van hooger onderwijs. Wij moeten ons er natuurlijk wel rekenschap van geven, dat dat een zeer ver gaande vereenvoudiging van het probleem is. Maar dan zou het, dunkt mij, ongetwijfeld tot de taak der leeraren behooren, zich af te vragen, welke leerlingen voor hooger onderwijs geschikt zijn en den ongeschikten een anderen weg te wijzen. De eischen, die de Delftsche rector in de boven aangehaalde passage stelt, zijn heel moeilijk voor de beoordeeling en ik wil mij niet wagen aan raadgevingen, hoe die zou zijn in te richten, ik meen echter, goed werk te doen door deze zaak onder Uwe aandacht te brengen.

Een ander punt, dat in die zelfde oratie ter sprake kwam, biedt U meer houvast. Ik haal nog de volgende passage aan: „In het college van Rector Magnificus en Assessoren is in den afgeloopen cursus eenige malen ter sprake gekomen het ontstellend gebrek aan beheersching der Nederlandsche Taal, waarvan een aanzienlijk deel der hedendaagsche studenten, helaas blijk geeft. Ik heb daarbij niet in de eerste plaats op het oog het feit, dat zij zich schuldig maken aan de meest ergelijke taalfouten. Dat zijn tenslotte „maar" taalfouten en ik begrijp bovendien zeer wel, dat de verwarring op het gebied der spelling weinig bevorderlijk is geweest voor het aankweeken van zorgvuldigheid in het schrijven van de Taal in welk schrijfdialect dan ook. Maar het kwaad steekt helaas veel dieper. Het raakt nl. niet specifiek de Nederlandsche geschreven taal, maar het is bij velen geworden een algemeen onvermogen, om hun gedachten in woord of geschrift tot uitdrukking te brengen, een onverschilligheid voor wat zij zeggen of schrijven, een ongevoeligheid bovendien voor de eischen, die nu eenmaal aan een betoog worden gesteld." Er is slechts weinig nadenken noodig om in te zien, dat de hier geuite klacht niet in het bijzonder de leeraren in het Nederlandsch aangaat. Ik meen, dat het hanteeren der taal, het juist uitdrukken, wat men bedoelt, voor een groot deel moet worden aangeleerd en ook metterdaad wordt geleerd in de wiskundeles. Maar ook bij alle andere vakken moet de eisch „juist uitdrukken, wat men bedoelt" worden gesteld. Dat is een zware eisch, ik geloof vooral bij de wiskunde; de leeraar zal veelal al blij zijn,

wanneer een leerling blijk geeft, dat hij de zaak heeft begrepen en dan geneigd zijn er over heen te stappen, dat het gebrabbel, dat deze voor den dag brengt, feitelijk onzin is, al kan hij, de leeraar, die den leerling door en door kent en het onderwerp volkomen beheerscht er wel uit opmaken, dat de zaak zoo ongeveer begrepen is. Toch is dat m.i. verkeerd. Men kan mij hier verschillende dingen tegenwerpen. Men kan vreezen, dat de leerling, die voortdurend aanmerkingen krijgt op de manier, waarop hij de dingen zegt, zal gaan probeeren zich te dekken door stukken uit het leerboek eenvoudig van buiten te leeren, wat volkomen verkeerd werkt, daar dan juist de zoo noodige oefening in het uitdrukken van gedachten ontgaan wordt en bovendien de leeraar, en ook de leerling zelf, nog veel minder kan uitmaken, of de zaak begrepen is. Een andere tegenwerping, die ik hier verwacht is van nog meer nuchteren aard. Als men verlangt, dat de leerlingen alles in behoorlijken vorm zeggen en dus bij alles, wat zij zeggen niet rust voor het inderdaad in behoorlijken vorm is gebracht, dan kost de eenvoudigste stelling zooveel tijd, dat men heelemaal niet kan opschieten en op die manier de afwerking van het programma in het gedrang komt. Bovendien vinden de leerlingen die muggenzifterij vervelend en loopt men gevaar, zoo doende de animo bij het onderwijs te dooden. Ik erken ten volle het gewicht van deze bedenkingen. Ik meen, dat inderdaad een eerste eisch voor het onderwijs is, dat de leerlingen er pleizier in hebben, maar toch meen ik, dat wij aan den eisch, „behoorlijk onder woorden brengen," moeten vasthouden en ik geloof, dat, wanneer dat maar van het begin af aan gebeurt, wat groote vasthoudendheid, voortdurende zelfbeheersching en onafgebroken toewijding eischt, het niet zooveel extra tijd behoeft te kosten en dat de leerlingen ook in dat deel van het onderwijs „precies zeggen, wat je bedoelt" wel degelijk pleizier kunnen krijgen. De klacht van den Delftschen rector is ernstig, ze is ook reeds van zeer verschillende zijden geuit. Ik wil er daarom nog even bij stilstaan en wel in het bijzonder bij de laatste opmerking. „De studenten hebben geen gevoel voor de eischen, die men aan een betoog moet stellen". Wij merken bij onze examens herhaaldelijk, dat een candidaat, inplaats van antwoord te geven op de gestelde vraag, een uitvoerig betoog ten beste geeft, waaruit zou kunnen blijken, dat hij van het onderwerp, waarop de vraag betrekking heeft wel wat geleerd heeft, maar waaruit men onbevoor-

oordeeld zou moeten concludeeren: de vraag heeft hij niet begrepen. Ik geloof, dat die conclusie in de meeste gevallen onjuist zou zijn, maar dat de fout, die de candidaat werkelijk maakt in wezen nog ernstiger is, hij weet wel, dat hij de gestelde vraag ter zijde laat, maar hij vindt dat zoo erg niet, hij geeft immers op andere manier blijk, dat hij er wel wat van weet. Deze opvatting is, dunkt mij, volkomen ontoelaatbaar. Ik vrees echter, dat men bij het middelbaar onderwijs veelal met zooiets genoegen neemt. De leerling geeft wel geen antwoord op de gestelde vraag, maar hij toont toch, zijn les geleerd te hebben en daar gaat het maar om. Neen daar gaat het niet om, althans niet alleen en de andere zaak, dat hij eerlijk zich bepaalt tot de gestelde vraag en als hij dat niet doet erkent zich daarvan bewust te zijn is m.i. gewichtiger. Om nu nog weer eens op den student terug te komen, hij begrijpt niet, dat het hier of daar iets (mijnentwege zelfs veel) van weten voor hem, die hooger onderwijs volgt, in belangrijkheid verre achter staat bij het kunnen volgen van en deelnemen aan een betoog. Ik meen, dat het tot de taak van het middelbaar onderwijs behoort, den toekomstigen studenten dat besef bij te brengen. Ik herhaal nog eens, dat ik mij nu het geval indenk, dat wij met een school te doen hadden uitsluitend bestemd voor voorbereiding voor hooger onderwijs. Deze toestand was vrijwel verwezenlijkt bij het oude gymnasium en men kan zich afvragen, is dat nu de eenige oorzaak van het feit, dat toen dergelijke klachten van de zijde van het hooger onderwijs, zoo zij er al waren, in elk geval met veel minder nadruk en minder dikwijls werden naar voren gebracht. Er zijn nog verschillende andere redenen te vinden. Vooreerst lag (en ligt nog) bij het gymnasium de beslissing over het eindexamen in handen van gecommitteerden, die voor verreweg het grootste deel uit de kringen van het hooger onderwijs komen, zoodat het hooger onderwijs tot op zekere hoogte zelf kon beslissen, voor welke candidaten het zijn poorten wilde ontsluiten. Maar dat is zeker niet het voornaamste. De voornaamste oorzaak ligt, dunkt mij, in de gevolgen van den geweldigen aandrang naar het middelbaar onderwijs, dien wij nu al meer dan een kwart eeuw waarnemen, waarbij ongetwijfeld tal van voor verdere, en zelfs voor alle, studie ongeschikte elementen zijn binnen gedrongen. Velen van U hebben dezen ontwikkelingsgang meegemaakt, de jongeren kunnen hem geschetst vinden in de bovengenoemde oratie van Rutgers. In dien tijd heeft naar mijn

meening de opvatting, dat het de plicht der leeraren is, een zoo hoog mogelijk percentage der eenmaal toegelaten leerlingen door de school heen te helpen, veel kwaad gedaan. Men kwam er toe, het onderwijs zoo in te richten, dat ook de eigenlijk onvoldoende leerlingen toch nog zoo veel mogelijk mee konden doen en zoo is meer en meer het begrijpen en kunnen vervangen door weten en van buiten kennen, voor het huiswerk werd daarbij wel minder inspanning maar meer tijd gevergd en de klachten over overlading namen steeds toe. Deze gang van zaken heeft zich vooral afgespeeld in den tijd, dat ik niet meer leeraar was, zoodat, wat ik hier over zeg, niet het resultaat is van eigen directe waarneming. Ik heb echter sterk den indruk, dat op deze wijze de verklaring van een groot deel der klachten, waartoe het middelbaar onderwijs in de laatste kwart eeuw aanleiding heeft gegeven, moet gezocht worden. Door mijn geregeld contact met Uw kringen bij de eindexamens zoowel aan goede scholen als aan minder goede is die indruk nog versterkt. In leeraarskringen in het bijzonder in den kring der wiskunde-leeraren is ook duidelijk een tendens merkbaar tegengesteld aan de boven geschetste. Het is mij natuurlijk niet ontgaan, dat het bekende ontwerp-leerplan van de commissie Beth een geheel anderen geest ademt, dat daarin met grooten nadruk het aanbrengen van begrippen, de vorming van den geest op den voorgrond wordt gesteld. Ook ik acht deze dingen van veel meer belang, ja als voorbereiding voor hooger onderwijs van een belang van hooger orde dan parate kennis en van buiten geleerde lessen en U zult misschien verwachten, daarom in mij een voorstander te zien van onverwijlde uitvoering van de voorstellen dier commissie. Dat ben ik echter niet; naar mijn overtuiging moet hier met groote omzichtigheid worden voorwaarts gegaan en ik vrees zelfs, dat de laatste wijziging van het leerplan voor de exacte vakken wat overijld is ingevoerd, al zijn er sinds de bekendmaking van het ontwerp verscheiden jaren verloopen. Ik kom daar straks nog op terug, maar nu ik in dit verband hierover te spreken gekomen ben, kan ik niet nalaten nog een enkele opmerking reeds nu te plaatsen. De denkbeelden der commissie brengen stellig een verzwaring voor de leerlingen mee, begrijpen eischt nu eenmaal meer inspanning dan van buiten leeren (behoudens voor enkele begaafden, die er toch wel komen en met wie men bij het opmaken van een leerplan nauwelijks rekening behoeft te houden). Waar ik nu zie, dat reeds het

tegenwoordige, of eigenlijk dan vroegere, leerplan aanleiding heeft gegeven tot een afzakken in de richting naar van buiten leeren, om te maken, dat ook de eigenlijk niet op de H.B.S. thuishoorende leerlingen toch nog eenigszins mee zullen kunnen en op het eindexamen toch nog wat zullen kunnen toonen, daar vrees ik, dat te snelle invoering van de plannen der commissie juist het tegengestelde van hetgeen deze wenscht zal ten gevolge hebben. Er is hier inderdaad een conflict, een conflict in Uwen kring, niet zoozeer een conflict tusschen twee partijen met principieel verschillende opvattingen, als wel een conflict tusschen theorie en practijk, waarbij de commissie Beth, hoe vreemd het moge klinken van een commissie van vier mannen, zoo zeer in de practijk doorkneed, aan den kant der theorie staat. Dat conflict moet m.i. worden uitgevochten en wel in Uwen kring uitgevochten, voordat men tot ingrijpende wijzigingen in het leerplan zal kunnen overgaan, en de door mij reeds aangeroerde vraag: „zal de H.B.S. eventueel met verandering van naam, een instituut worden, uitsluitend of althans in hoofdzaak bestemd tot vooropleiding voor het hooger onderwijs" zal bij dat uitvechten een groote rol kunnen spelen. Als ik, zooals ik de laatste dagen deed, de verschillende punten, die ik aanroerde nog eens naga, lijkt mij dit het belangrijkste. Ik wil er dan ook nog even bij blijven staan en trachten mijn bedoeling zoo scherp mogelijk te zeggen. U vergeve mij, als daarbij de verschillen wat al te zeer toegespitst worden. De theorie zegt, „wij moeten dieper gaand meer op begrijpen gericht onderwijs geven", de practijk zegt, „wij moeten onderwijs geven, waar alle leerlingen wat aan hebben en zorgen, dat ook de weinig begaafden, als ze eenmaal zoover gekomen zijn, bij het eindexamen een kans hebben. Daarbij moet wel van de grondigheid wat opgeofferd worden." Als U mij vraagt, is dat nu ook bij de wiskunde werkelijk het geval, dan moet ik antwoorden, de waarnemingen, waarover ik straks nog zal spreken, wijzen inderdaad dien kant uit.

Maar ik sprak over de oorzaken van het feit, dat thans van de zijde van het hooger onderwijs zooveel meer klachten komen dan in den tijd van het oude gymnasium. Er is nog een ander punt, dat in dit verband de aandacht verdient en wel juist het leerplan. Daarom heb ik dan ook steeds van het *oude* gymnasium gesproken. Ik erken, dat de latere wijzigingen in dat leerplan een eisch des tijds waren; dat neemt echter niet weg, dat het oude gymnasium

met zijn eindexamen over slechts weinige vakken, als opleidingsschool voor het hooger onderwijs groote voordeelen had. Concentratie der aandacht op een bepaald onderwerp was mogelijk en dat bracht weer mee de mogelijkheid van het inleven in een bepaalde gedachtenspheer, voor de α's die der klassieken, terwijl voor de β's ook die der wiskunde een belangrijke plaats innam. Het onder den druk van het altijd dringend tijdsgebrek haastig verzamelen van parate kennis kwam niet, althans veel minder dan onder de tegenwoordige omstandigheden voor. U moet hieruit niet afleiden, dat ik de klassieke opleiding beschouw als de eenig aangewezen voorbereiding voor hooger onderwijs. Ik was indertijd, hoewel ik toen gymnasiumleeraar was en zelf oud-gymnasiast ben, overtuigd voorstander van de wet Limburg, op dien grond, dat ik meende (en ik meen dat nog), dat een opleiding, waarbij de nadruk valt op de exacte vakken zeer goed geschikt kan zijn om voor hooger onderwijs voor te bereiden en dat men hun, die eenmaal dien weg opgegaan zijn, den toegang tot het hooger onderwijs niet behoort te bemoeilijken door een staatsexamen (behalve om practische redenen, nl. voor hen, die letteren of theologie willen studeeren). De studie voor dat examen is in verreweg de meeste gevallen als voorbereiding voor hooger onderwijs slechts van zeer twijfelachtige waarde. Naar mijn opvatting hebben de omstandigheden gemaakt, dat de wet-Limburg geen eerlijke kans heeft gekregen, om in de practijk te toonen, dat zij op juisten grondslag berustte. Ik sprak al terloops over dien loop der geschiedenis, voor een uitvoeriger uiteenzetting verwijs ik weer naar de oratie van Rutgers.

Zooals de toestand nu is, is de H.B.S. echter niet uitsluitend een instituut tot voorbereiding voor hooger onderwijs. Ongetwijfeld maakt dat Uw taak veel zwaarder, want het antwoord op de vraag: „is deze leerling voor het verder volgen van de H.B.S. geschikt", is veel moeilijker te vinden. Er is mij bij de eindexamens wel eens toegevoegd: „U stelt alleen maar de vraag: is die candidaat geschikt voor Delft". Ik durf gerust verzekeren, dat deze opmerking ten eenenmale onjuist is. Ik ben er mij volkomen van bewust, dat bij den tegenwoordigen toestand niet alleen maar die vraag mag gesteld worden. Ik meen zelfs, dat ik als deskundige dat nog minder mag doen dan een leeraar, die op die wijze ten minste bij die soort moeilijke beslissingen een richtsnoer vindt. Onjuist zou namelijk zijn, om als eenmaal aanvaard is: men mag niet alleen maar de

vraag stellen, is deze candidaat geschikt voor de studie aan de Technische Hoogeschool, de conclusie te trekken: men mag die vraag heelemaal niet stellen. De voorbereiding voor de studie in Delft en voor het hooger onderwijs in het algemeen is in elk geval een belangrijk onderdeel geworden van de taak der H.B.S. Het einddiploma geeft toegang tot die studie en men mag, ja men moet, zich bij de uitreiking van het diploma wel degelijk de vraag voorleggen: „is deze candidaat voor hooger onderwijs geschikt". Ja, ik geloof, dat U verder moet gaan. Niet alleen bij het eindexamen, maar ook bij de geheele studie moet U zich telkens weer de vraag voorleggen: behoort deze leerling wel op de H.B.S. thuis en bij de beantwoording van die vraag mag de overweging, of hij eventueel voor hooger onderwijs geschikt zal blijken, wel degelijk een rol spelen. Ik acht mij niet competent om U voor de behandeling van die vraag verderen raad te geven. Als leeraar heb ik de daaraan verbonden moeilijkheden nauwelijks ontmoet, daar ik vrijwel alleen aan gymnasia ben verbonden geweest. Alleen nog de opmerking, dat, zooals de toestand nu is, het bestaan der H.B.S. A de behandeling dikwijls kan vergemakkelijken.

Tot dusver heb ik in hoofdzaak over algemeene gezichtspunten betreffende het middelbaar onderwijs gesproken. Ik wou nu nog enkele opmerkingen maken, die in het bijzonder betrekking hebben op het onderwijs in de wiskunde en de aanverwante vakken. Mijn meening daarover is gebaseerd eensdeels op waarnemingen bij onze studenten in Delft, anderdeels op indrukken bij het eindexamen. In de eerste plaats wil ik nog iets opmerken over dat examen en over examens in het algemeen. Het is meer en meer gebruikelijk geworden, examens in een ongunstig licht te stellen en de candidaten als beklagenswaardige slachtoffers te beschouwen. Wie over examens glossen maakt, als maar de examinator als een monster en de examinandus als een rampzalige wordt voorgesteld, kan zeker op succes rekenen. Ik ben overtuigd, dat examenvrees, examenkoorts en al dergelijke op deze wijze kunstmatig worden aangekweekt als in een besmette broeikasatmospheer. Natuurlijk is, als de candidaten het in de eerste plaats als een voorrecht gevoelen, dat zij examen mogen doen, maar ook, dat althans zij, die behoorlijk voorbereid zijn, en dat zijn toch de meesten, het examendoen zelf wel inspannend, maar in hooge mate animeerend vinden en dat zij er na afloop met groote voldoening op terug zien. In mijn herin-

nering was dat vroeger in het algemeen ook zoo en ik geloof, dat het tegenwoordig in vele gevallen nog zoo is, maar deze natuurlijke gevoelens worden onderdrukt uit vrees abnormaal te schijnen; het hoort nu eenmaal zoo, tegen een examen op te zien en het vreeselijk naar te vinden, òf het met kwajongensbranie als verachtelijk te behandelen. Ik geloof werkelijk, dat het onjuist is, zenuwachtigheid bij een examen als normaal te beschouwen, dat die in het algemeen, als het examen maar geheel zakelijk wordt afgenomen, ook niet ontstaat, en dat in de meeste gevallen, als zij ontstaat, de bovenbesproken kunstmatige opwinding, waaraan soms de geheele omgeving, ouders, vrienden, het publiek, de pers zelfs, mee doet, een groot deel der schuld draagt. Er is hier inderdaad sprake van een ziektetoestand onzer maatschappij, waarvan een doeltreffende bestrijding zeer wenschelijk, maar ook zeer moeilijk is. Als een der beste hulpmiddelen zou ik willen aanbevelen, dat ieder, die daartoe iets kan bijdragen, zorgt, dat zoo weinig mogelijk candidaten slecht voorbereid examen doen. De toestand wordt nog daardoor vertroebeld, dat die zenuwachtigheid veelal wordt gebruikt als een excuus voor onvoldoende prestaties, er wordt een soort zwendel mee gedreven, om allerlei voorrechten en buiten het normale vallende gunstige behandeling te verwerven; men behandelt die zenuwachtigheid eer als een gunstige factor voor de beoordeeling dan als een zwakheid, wat het toch inderdaad in hooge mate is. Meer dan eens heb ik studenten, die kwamen verzekeren, dat hun kennis toch wel voldoende was en dat zij er vast op rekenden in de practijk wel vooruit te zullen komen, maar dat zij op een examen nu eenmaal die kennis niet konden toonen, voorgehouden: „maar als U in deze rustige atmospheer, tegenover welwillende menschen, waar niets is, om Uw aandacht af te leiden, niet het beste kunt praesteeren, waartoe U in staat bent, hoe moet het dan in de practijk gaan, waar U misschien moeilijke beslissingen moet nemen, te midden van allerlei afleidende zorgen, in een wellicht tegenstrevende omgeving, waar anderen telkens zullen probeeren, U een vlieg af te vangen" en dan antwoordt de candidaat wel: „ja maar nu hangt er zooveel van af", maar dat gaat heelemaal niet op „nu gaat het om drie maanden eerder of later het diploma, in de practijk kunnen met Uw behandeling van een probleem groote kapitalen, ja ook honderden menschenlevens gemoeid zijn" en dan is het antwoord: „ja maar dan is het geen examen", als of daarmee alles is gezegd.

Men hoort veel praten over den plicht van den examinator, om den candidaat op zijn gemak te stellen. Dien plicht erken ik, maar ik meen, dat daarvoor in verreweg de meeste gevallen niets bijzonders noodig is, en eenvoudig zakelijke behandeling de beste gedragslijn is, waarmee ik echter niet ontkend wil hebben, dat examen afnemen een moeilijke kunst en ook een veeleischende, inspannende arbeid is, maar dat hoef ik in dezen kring niet te zeggen. Bij het eindexamen heb ik ook eens een leeraar ontmoet, die de candidaten al maar met zachtheid omwikkelde, tot ik er ten slotte wee van werd en dan ook een van die jongens zei: „maar mijnheer, ik ben heelemaal niet zenuwachtig, bij het schriftelijk was ik ook niet zenuwachtig" waarop de leeraar antwoordde: „zeg dat maar niet te veel, als je zenuwachtig was, kon je nog eens wat meer vergeven worden". Ik begrijp wel, dat dat voor een deel als een grapje moet worden opgevat, maar er spreekt toch een mentaliteit uit, die ik zeer af te keuren vind en ik heb dan ook gezegd: „zeg dat vooral wel, dan zal men zeggen, dat is een jonge man, zooals we ze in de maatschappij noodig hebben".

Maar ik ben afgedwaald. Ik zei, dat mijn meeningen over de resultaten van het onderwijs op de H.B.S. deels berusten op indrukken, opgedaan bij het eindexamen, deels op waarnemingen bij onze Delftsche studenten. Ik geef er mij natuurlijk wel rekenschap van, dat het beeld, dat de deskundige voor wiskunde bij het eindexamen krijgt, ofschoon hij het schriftelijk werk ook naziet, verwrongen is tengevolge van het stelsel der vrijstellingen, dat maakt, dat zelden een behoorlijk voldoende leerling mondeling doet. Ik geef er mij ook rekenschap van, dat aan den anderen kant onze Delftsche studenten voor de groote meerderheid voortkomen uit het betere deel der leerlingen, en dat wij het beeld weer opnieuw bederven, doordat wij bij onze examens (noodgedwongen) een dergelijk stelsel van vrijstellingen toepassen, als bij het eindexamen in gebruik is. Kortom, wij hebben met zeer moeilijke waarnemingen te doen, waarbij men met conclusies voorzichtig moet zijn; toch meen ik, dat aan mijn indrukken wel een zekere waarde toekomt.

Uit de cijfers blijkt, dat zij, die in Delft gaan studeeren, voor verreweg het grootste deel tot de goede leerlingen behooren. Zij hebben voor de beide wiskundevakken gemiddeld 7½ à 8. (Opvallend is, dat dit cijfer voor de oud-gymnasiasten veel lager ligt, omstreeks 6½, hoewel voor deze vermoedelijk nog sterker geldt,

dat alleen zij, die zich tot de wiskundevakken aangetrokken voelen, naar Delft gaan; waarschijnlijk worden bij het eindexamen gymnasium inderdaad hoogere eischen gesteld, maar ik kan den indruk niet van mij afzetten, dat de regeling van het examen, waarbij de gecommitteerde op de bepaling van het cijfer een overwegenden invloed heeft, daarop zoowel direct als indirect inwerkt). Het cijfer voor de meetkundevakken is, bij hen die van de H.B.S. afkomstig zijn, over het geheel iets hooger dan voor algebra en goniometrie, hoewel naar mijn meening de schriftelijke opgaven, waarop practisch de cijfers boven 7 alleen berusten, voor de meetkundevakken altijd, althans al sinds verscheiden jaren, wat moeilijker zijn. Het ongunstigst zijn de resultaten bij de goniometrie. Merkwaardigerwijze zijn de klachten hierover al oud, het lijkt mij echter, dat zij de laatste jaren weer in kracht toenemen. Ik verbaas mij inderdaad vaak erover, dat de jongelui, die bij het eindexamen van de vraagstukken nog dat terecht brengen, wat wij dan waarnemen, een jaar later, als zij voor het propaedeutisch staan, in dat opzicht zoozeer tekort schieten. Het schijnt, dat een vernisje van examenvaardigheid toch een zekere rol speelt en een jaar later geheel verdwenen is. Een afdoende verklaring acht ik dit echter niet. Het zelfde geldt trouwens, zij het minder opvallend, bij de algebra. Of het ook vóor de meetkundevakken geldt, kan ik minder goed beoordeelen. Bij de goniometrie — ik laat opzettelijk bij deze bespreking de trigonometrie eerst wat op den achtergrond — spelen formules een belangrijke rol. Ik hecht aan het van buiten leeren van formules slechts een zeer geringe opvoedende waarde, maar ik meen, dat bij de goniometrie noodig is een zoodanige oefening, dat de leerlingen zich daarbij de formules vanzelf eigen maken. Dat is, dunkt mij in het algemeen, en althans in het stadium van het middelbaar onderwijs, het middel om formules te leeren. Ik raak hier aan een veelbesproken quaestie. Er is bij moderne onderwijsmannen een zekere minachting voor technische vaardigheid in de wiskunde, die men dan tegenover begrijpen pleegt te stellen. Dat is dunkt mij onjuist. Al moet ik waarschuwen tegen al te mechanisch werken, ik acht techniek in dezen zeer belangrijk; het begrijpen, dat op de H.B.S. te pas komt, behoort op waarneming te berusten en voordat de waarneming van een verschijnsel aanleiding geeft tot het opmerken van een wetmatigheid zijn talrijke waarnemingen noodig. Dit lijken misschien wat groote woorden,

waar ik heelemaal niet van houd, maar laat mij mijn bedoeling met een voorbeeld toelichten. Men kan de leerlingen eerst laten van buiten leeren: „het product van twee machten van eenzelfde grondtal is een macht van dat grondtal, waarvan de exponent gevonden wordt door de exponenten der eerstgenoemde machten bij elkaar op te tellen" en als dan $a^3 . a^5$ moet worden uitgerekend eerst constateeren, dat die stelling daar kan worden toegepast enz. Ik ben vrijwel overtuigd, dat niemand van U zoo te werk gaat. De leerlingen moeten eerst zoo dikwijls $a^3 . a^5$ en dergelijke producten hebben uitgerekend, dat zij de bovengenoemde stelling vanzelf opmerken, dan wordt die eens in woorden gebracht (een oefening, die staat vrijwel naast het zich werkelijk eigen maken van de stelling) de stelling wordt niet van buiten geleerd, (ook niet de formule $a^m . a^n = a^{m+n}$), maar verder voortdurend toegepast. Zoo gaan bij het onderwijs techniek en begrijpen hand in hand. De formules der goniometrie staan op iets hooger plan in zooverre dat de leerling ze ziet, zooals in het voorbeeld van daareven, direct zelf ziet, hier is dus meer voorbereidende leiding noodig, maar het zich eigen maken door het gebruik geldt hier even goed en ze *moeten* ze kennen.

U zult mij vragen, maar welke dingen kennen ze nu niet. Ik zal U een aantal voorbeelden noemen. Ik vrees, dat de lijst U niet meevalt. Het zou wel goed zijn, als U *zelf* eens die waarnemingen kon doen, maar neemt U op het oogenblik genoegen met de resultaten van mijn waarnemingen.

Als $\sin\varphi$ gegeven is, $\cos\varphi$ uitrekenen, krijgen ze natuurlijk wel gedaan, maar velen zien het niet onmiddellijk, (ook als het alleen maar over scherpe hoeken gaat,) en als de docent het onmiddellijk opschrijft zeggen ze, „dat gaat me te vlug, zoo'n college kan ik niet volgen". (Velen moeten er eerst een figuurtje bij teekenen; als het er om gaat, bij gegeven $tg\varphi$, $\sin\varphi$ en $\cos\varphi$ te vinden, is dat, geloof ik, wel geschikt, maar om $\sin\varphi$ en $\cos\varphi$ in elkaar om te zetten moet het, dunkt mij, niet noodig zijn). $1 - \cos\varphi$ en $1 + \cos\varphi$ in goniometrische functies van den halven hoek uit te drukken, hebben ze meestal niet alleen niet paraat, maar ze hebben zeer veel moeite, om het gedaan te krijgen. Als dat op een mondeling examen te pas komt, en dat doet het haast altijd, staan ze er dikwijls op ergerlijke manier mee te schutteren. Het komt herhaaldelijk voor, dat onze studenten bij het onbepaald integreeren goniometrische substituties

vermijden, omdat ze opzien tegen goniometrie. De waarden der goniometrische functies voor 0, 90°, enz. zitten er doorgaans niet vast in. Met de teekens in de verschillende kwadranten worden veel fouten gemaakt, en het vervangen van cosinus door sinus van het complement en dergelijke gaat gewoonlijk niet vlot. Ook over de hoofdformules der goniometrie struikelen velen nog wel eens, en over de z.g. *p-q*-formules nog meer, vooral als ze in omgekeerde richting moeten worden toegepast, ik bedoel dus als een product door een som moet worden vervangen.

Nu nog een enkel woord over de trigonometrie. Bij het eindexamen valt het mij herhaaldelijk op, dat de candidaten veelal het gebruik van de goniometrische functies zoo lang mogelijk uitstellen en een vraagstuk grootendeels langs planimetrischen weg oplossen. Dikwijls is dat uit het oogpunt van wiskundige aesthetica niet af te keuren, maar in de meeste gevallen is de eigenlijke oorzaak, dat de leerlingen zich het omgaan met de goniometrie niet voldoende eigen gemaakt hebben. Inderdaad is het, alsof ze de planimetrie, (die in de lagere klassen geleerd wordt), beter kennen. Wat in de eerste jaren wordt geleerd, schijnt beter te beklijven, misschien doordat de aandacht dan nog niet over zooveel vakken is verdeeld. De cosinusregel (en ook de projectiestelling) beschouwen velen als iets, dat aan de uiterste grenzen van hun kennis ligt. In drie gegeven elementen van een driehoek de overige uitdrukken, gaat zelden vlot. (Opmerkelijk is, dat velen de formules, waardoor de tangenten van de halve hoeken in de zijden worden uitgedrukt, tangensregel noemen). Daarentegen blijken bij het eindexamen velen formules voor de stralen van in- en aangeschreven cirkels van een driehoek van buiten te kennen, van welke ik liever zou verlangen, dat ze uit de figuur konden aflezen, wat echter voor de meesten een zwaardere eisch is. Ik wou in dit verband over formules nog iets zeggen. Ik houd niet van het van buiten leeren van formules, ik zal dat straks bij de bespreking der stereometrie nog wel eens herhalen. Evenwel, zooals wel eens voorgesteld is, bij de planimetrie de berekening van lijnen in den driehoek maar heelemaal weg te laten, gaat mij te ver. Dat is een onderwerp, dat volkomen binnen het bereik der leerlingen valt, maar toch wel eenige inspanning vergt. Blijkens mijn ondervinding hebben de leerlingen er gewoonlijk wel pleizier in. Het lijkt mij toch ook wel wat waard, dat ze gevoel krijgen voor een „mooie" formule. Dat alleen lijkt mij

al voldoende motief, om b.v. de formule, waardoor het oppervlak van een driehoek wordt uitgedrukt in de zijden, te behouden.

Ik kom nu tot de algebra en wil in de eerste plaats iets zeggen over de tegenwoordig zoo geliefde graphische voorstellingen. Dat leek bij de invoering zoo veel belovend. Wie de indertijd daarover gehouden besprekingen heeft gevolgd, moet wel onder de bekoring geraakt zijn. Ik ben het met het toen aangevoerde ook wel eens, ik zou zelf ook in dien geest gesproken hebben, maar toch geloof ik, dat op het oogenblik het resultaat teleurstellend is. Vooreerst is er geen gebied — behalve het hoofdstuk limieten — waar erger dan hier met woorden geknoeid wordt. „Deze functie staat met haar top naar beneden". „De parabool bereikt een maximum". „Deze getallen (of ook wel dit getal) voldoen aan de parabool." „De functie voldoet aan dit getal." „Opdat deze lijn aan de functie raakt, moet de parabool aan twee gelijke wortels voldoen". Ziehier een bloemlezing van uit herinnering neergeschreven voorbeelden, die stellig met meerdere, wellicht nog dwazere, zou zijn uit te breiden. Maar ook zakelijk valt de uitkomst niet mee. Het maximum of minimum van een kwadratische functie wordt niet meer, zooals vroeger, door een redeneering, maar door (blindelings) toepassen van een recept gevonden, evenzoo gaat het, als moet worden uitgemaakt, voor welke waarden der onafhankelijk veranderlijke zoo'n kwadratische functie positief, voor welke negatief is. Dat laatste vooral voel ik als een nadeel en ik zie niet duidelijk de winst, die daar tegenover staat. De grafische voorstellingen fungeeren wel als paradepaard op de mondelinge examens en gewoonlijk beantwoorden de candidaten de enkele vragen, die daarover steeds weer gesteld worden ook wel, maar het maakt over het geheel den indruk van het opzeggen van een van buiten geleerd lesje. Ik vrees, dat het met de differentiaalrekening evenzoo zal gaan. Er is nog een reeds veel besproken punt, dat bij het invoeren van nieuwe onderwerpen in het programma een belangrijke rol speelt, de vraag nl. hoe vinden we den tijd er voor. Gewoonlijk heeft men het antwoord klaar „de wortelvormen daar kan best wat af". Dat is misschien wel waar, ik heb bij het onderwijs geven dien indruk ook wel eens gekregen, vooral bij herleidingen van vormen met gebroken en negatieve exponenten, het is b.v. dunkt mij werkelijk dwaas, in een wortelteeken een gebroken negatieve exponent te gaan schrijven, maar ik meen hier toch een waarschuwing te moeten doen hooren. De

tegenwoordige vorm van onze schoolboekjes is het product van de ervaring van verscheiden geslachten, waarbij steeds vooraanstaanden uit de onderwijswereld met niet minder toewijding dan de tegenwoordige gezocht hebben naar de beste middelen, om den leerlingen de stof bij te brengen. Dat er zooveel van die vraagstukken over wortelvormen voorkomen, berust stellig op de ervaring, dat de leerlingen veel van die herleidingen moeten hebben uitgevoerd voor dat zij die dingen beheerschen. Daarbij is stellig wel eens wat ingeslopen, dat er niet in hoort. De een vraagt zich af, wat kan ik nu nog eens opgeven, om de oefenstof uit te breiden zonder in geestdoodende herhaling te vervallen en als hij zoo iets vindt, werpt een tweede er zich op b.v. voor examenopgaven; een derde trekt dan de conclusie „dat moet dus ook gekend worden" en bereidt het met een aantal gelijksoortige opgaven voor. Zoo zijn, geloof ik, herleidingen als $\sqrt{10 + 6\sqrt{5}} = \sqrt[4]{5}\,.\,(1 + \sqrt{5})$ er in gekomen, heel aardig op zich zelf, maar niet in het standaardprogram thuis hoorend. Maar dat er zoo heel veel is, dat zonder schade kan gemist worden, geloof ik toch niet. En voor de beginselen der differentiaalrekening, wanneer men zich niet zal beperken tot het van buiten leeren van twee of drie recepten voor het opschrijven der afgeleiden van enkele eenvoudige functies, is toch wel tijd noodig. Dat spreekt wel van zelf, maar ik zeg het met eenigen nadruk, omdat ik zie, hoe weinig gewoonlijk bij den tegenwoordigen toestand van limieten en reeksen terecht komt. Bij de reeksen wordt de zaak nog vertroebeld door de omstandigheid, dat een reeks op de H.B.S. iets anders is dan in de wiskunde. In de wiskunde ontstaat een reeks als men de termen van een *oneindig voortloopende* getallenrij door + teekens verbindt; bij het middelbaar onderwijs viert nog steeds de laatste term hoogtij. De som van een reeks is (in de wiskunde) de limiet, waartoe de som van de eerste n termen nadert, als n onbepaald toeneemt. Een candidaat voor K I, die dat niet weet, krijgt voor algebra hoogstens een 3. Bij het eindexamen H.B.S. is het mij overkomen, dat een examinator opschreef $a + ar + ar^2 + \ldots\ldots$ meedeelde, dat is een meetkundige reeks, de reden r ligt tusschen 0 en 1 en vroeg, wat is de som van die reeks, waarop de candidaat het eenige juiste antwoord gaf $\frac{a}{1-r}$ maar de examinator zei: „neen, dat is de limiet van de som". Dat

is natuurlijk dwaas, de stippeltjes kunnen niet anders beteekenen dan dat niet een reeks à la H.B.S., maar een reeks, zooals zij in de wiskunde behandeld worden, bedoeld wordt, dan is de som een constante en is van limiet daarvan geen sprake. Ik begrijp niet, waarom men in de bovenbedoelde gewoonte geen verandering brengt. Uit Uwen kring zijn in dien geest ook reeds stemmen opgegaan, maar zij schijnen niet door te dringen. De zaak wordt er naar mijn smaak niet beter op, doordat in den laatsten tijd het misbruik insluipt, om datgene, wat in de wiskunde de som van de reeks heet, limietsom te noemen. Ik noem dat een misbruik; het is wel juist, dat het woord „som" hier een beteekenis krijgt, die niet door de oorspronkelijke definitie gedekt wordt, maar zooiets komt in de wiskunde toch zoo vaak voor en in andere gevallen vindt men het toch ook niet noodig, telkens een nieuw woord te verzinnen.

Zooals ik al zei, zijn in het hoofdstuk limieten de resultaten van het onderwijs het minst bevredigend. Ik wil een enkel vrij willekeurig gegrepen voorbeeld geven. Op de vraag: wat bedoelt U met die δ, krijgt men veelal ten antwoord het kleinst mogelijke positieve getal en als de examinator dan zegt, dat is toch onmogelijk, $\frac{1}{2}\delta$ is toch ook positief en kleiner, dan krijgt de candidaat gewoonlijk niet de overtuiging, dat op éclatante wijze in het licht is gesteld, dat hij onzin heeft gepraat, maar hij heeft het gevoel: „ik zei het eigenlijk wel goed, maar de examinator wou dwars zijn en hij is in het praten over die dingen gladder dan ik en toen kon ik er niet meer tegen op". Bij het examen voor K I komt het herhaaldelijk voor, dat een candidaat, als het over limieten gaat, zich zoo in zijn redeneeringen verwart, dat er geen touw aan vast te knoopen is en als de examinator dan opmerkt: „ik vrees, dat, als U dit zoo aan een leerling uitlegt, hij er weinig van zal begrijpen", dan ziet men de oogen van den candidaat verhelderen en hij zegt met groote overtuiging: „maar dan zou ik het heel anders doen"; de boosaardige opmerking, „dat zou je ook geraden zijn", houden wij dan binnen, die zou toch ook verkeerd begrepen worden. Ik vertel dit, om te doen uitkomen, dat men algemeen het begrip limiet voor moeilijk houdt, (wat, geloof ik, juist is) en meent, dat men het bij het onderwijs er niet al te nauw mee moet nemen en er maar wat omheen moet praten, eventueel met veel woorden. Daartegen kom ik op. Men kan bij het middelbaar onderwijs niet de uiterste

strengheid verlangen, die is voor de leerlingen niet geschikt en niet noodig, maar wel kan men eischen, dat wat gedoceerd wordt, juist is en in behoorlijken en duidelijken vorm gebracht. *Men probeere vooral niet, de duidelijkheid aan te brengen door veel woorden,* dat moet mislukken en brengt zelfs den besten in gevaar, zich te verpraten en dingen te gaan zeggen, die feitelijk onjuist zijn. Wel kunnen veel voorbeelden helpen, maar de leerlingen moeten zich door eigen strijd het begrip eigen maken. De leeraar kan slechts leiding geven en het onzin praten tegen gaan; hij heeft hier een moeilijke taak. Men denke aan deze opmerking ook in verband met de invoering der infinitesimaalrekening.

Nu nog een enkel woord over de opmerking, dat men zich bij het middelbaar onderwijs met een beperkte strengheid moet te vreden stellen. De geschiedenis der wiskunde geeft voorbeelden te over van het feit, dat beschouwingen, die wij tegenwoordig niet meer als streng erkennen, vruchtbaar kunnen zijn, ook voor het onderwijs. Euler wil in zijn *Vollständige Anleitung zur Algebra,* bewijzen, dat $-a \times +b = -ab$, maar hij geeft geen ander motief dan: „als het $+ab$ was dan zou het net hetzelfde zijn als $+a \times +b$", waarmee ik nu ook weer niet wil zeggen, dat ik U dat als voorbeeld ter navolging voorhoud, hoezeer ik Euler vereer.

In besprekingen over het leerplan ontmoet men vaak de uitdrukking het getalbegrip. Ik weet niet recht, hoe men dat algemeen opvat, maar mij lijkt het toe, dat de moderne definities van het onmeetbare getal voor de leerlingen der H.B.S. niet geschikt zijn. Het zelfde geldt naar mijn meening voor de invoering der breuken. Bij het lager onderwijs is den kinderen met behulp van beschouwingen over appels duidelijk gemaakt, wat ¾ beteekent, U zult, dunkt mij, goed doen, ze dat niet met behulp van beschouwingen over getallenparen weer onduidelijk te maken. De mate van inzicht over de onmeetbare getallen, die naar mijn meening op de H.B.S. gevraagd moet worden, komt heel mooi te pas bij de herleiding van vormen als $\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$. Ik heb dat bij het eindexamen (al heet het vak reken- en stelkunde) maar zelden, maar toch wel een enkele keer, goed hooren behandelen. Als dat gebeurt, is het moeilijk genoeg.

Velen van U zullen nu misschien denken, dat getheoretiseer interesseert me niet erg, vertel ons nu liever eens evenals bij de goniometrie, waarin in onze oud-leerlingen na een jaar blijken te

kort te schieten. Dan komt er voor leerlingen, die op het eindexamen gemiddeld 7½ à 8 haalden, een sombere lijst. Met de eigenschappen der wortels van de vierkantsvergelijking zijn ze niet geheel vertrouwd, de merkwaardige quotienten kennen ze nauwelijks, zelfs $1 + x^3$ en $1 - x^3$ in factoren ontbinden gaat slecht en slechts zeer weinigen komen er zonder hulp toe, op te merken, dat $1 + x^6$ door $1 + x^2$ deelbaar is. Een onechte algebraïsche breuk als de som van een geheelen vorm en een echte breuk te schrijven, levert moeilijkheden op, evenals het herleiden van een samengestelde breuk. *Met de formule voor de som van een meetkundige reeks* zijn velen niet vertrouwd. Bij een stelsel niet-lineaire vergelijkingen schrijven ze herhaaldelijk oplossingen neer, die niet voldoen, niet oplossingen, die bij de bewerkingen zijn ingevoerd, maar waartoe ze komen door recepten, die ze niet goed begrepen hebben, blindelings en verkeerd toe te passen. De theorie van het invoeren van wortels b.v. bij de oplossing van irrationeele vergelijkingen is gewoonlijk niet heel goed begrepen. Eigenlijk begrijpen velen niet goed, wat een wortel van een vergelijking of een oplossing van een stelsel vergelijkingen is. Over het geheel werken ze te machinaal. Met negatieve en gebroken exponenten worden nog al eens fouten gemaakt en met log 1 en log 0 wordt op ontstellende wijze gezondigd.

Over de meetkundevakken zal ik korter zijn. Ik geloof, dat, althans wat het schriftelijk examen betreft, terecht de planimetrie van het eindexamen is verdwenen. Niettegenstaande het zooeven reeds ter sprake gebrachte feit, dat de leerlingen zich gewoonlijk in dat vak wel thuis voelen en dat doorgaans althans de goede leerlingen er duidelijk pleizier in hebben, meen ik, dat het vinden van het bewijs van een nieuwe stelling, als die ten minste iets om het lijf zal hebben, voor het examen een te zware eisch is, waarbij nog het bezwaar komt, dat het toeval er een niet onbelangrijke rol in speelt, of de candidaat bij het zoeken naar zoo'n bewijs al of niet succes heeft. In de stereometrie kan men eerder geschikte opgaven vinden. Zoo omstreeks vijftien jaar geleden was het gebruikelijk, vraagstukken te geven, die de leerlingen vrijwel zeker konden maken, als ze maar een aantal formules, vooral over inhouden van stukken van den bol (de bolschil speelde een heele rol) van buiten kenden en anders niet. Opmerkelijk is, dat een afleiding van die formules ook bij het mondeling haast nooit gevraagd werd. Nu weet ik wel, dat ook het

toepassen van formules iets is, dat geleerd moet worden en ook slechts door oefening geleerd kan worden, maar het zoozeer op den voorgrond brengen van formulekennis lijkt mij toch een misstand; bovendien onvruchtbaar. Ik heb bij het propaedeutisch examen eens gezien, dat een candidaat den inhoud van een omwentelingskegel moest hebben en daartoe trachtte te komen door maar formules te prevelen $\pi r^2 h$, $\pi r a$, $^1/_6 \pi k^2 h$, $2\pi R h$, $^4/_3 \pi R^3$ enz. uitdrukkingen van den tweeden en derden graad door elkaar, misschien in de hoop, dat ik, als de goede voor den dag kwam, wel op de een of andere manier zou reageeren. In de latere jaren zijn de opgaven veel beter maar ook moeilijker geworden. De uitkomst leert, dat de candidaten over het geheel een berekening wel kunnen uitvoeren, maar dat de vorm, waarin ze een bewijs opdienen, dikwijls veel te wenschen overlaat. Het komt ook wel voor, dat ze in den loop van het betoog den draad kwijt raken en niet meer weten, waar het heen moet, dat zij meenen een stelling bewezen te hebben, als zij het omgekeerde hebben, komt vrij veel voor. Ik heb den indruk, dat bij het eindexamen bewijzen veelal niet critisch genoeg worden nagezien en dat er te hooge cijfers voor worden gegeven.

De beschrijvende meetkunde is tegenwoordig bij het eindexamen een ophalertje. Vroeger was dat anders. Toen ik mij na mijn doctoraal bij den inspecteur Dr. Campert presenteerde, hield hij mij op vaderlijken toon voor: „en zie je er nu niet tegen op, om op zoo'n H.B.S. in de vijfde klas beschrijvende meetkunde te moeten geven". Inderdaad ging destijds de beschrijvende meetkunde vooral ook bij de leerlingen door voor een moeilijk vak. Ook dat is tegenwoordig geloof ik, anders, behalve dat er altijd enkelen zijn, die er werkelijk niets van kunnen. Als ik een aanmerking zou willen maken, zou het zijn, dat de leerlingen dikwijls te kort schieten, als ze de constructies moeten *verklaren* en over het geheel het vak zoo erg receptmatig behandelen, wat vooral in het hoofdstuk over het neerslaan tot uiting komt. Het komt mij voor, dat op deze wijze het doel, bevordering van het ruimte-inzicht en dat moet toch op de H.B.S., dunkt mij, het hoofddoel zijn, wordt voorbij gestreefd.

Ten slotte een enkel woord over de mechanica. Bij het oude provinciale eindexamen was dat vak er om berucht, dat de leerlingen er zoo gemakkelijk vrijstelling van mondeling voor konden halen zonder er eigenlijk veel van te begrijpen. Dat zal wel daaraan te wijten zijn, dat het bestreken gebied, vooral voor zoover het zich

leent voor schriftelijke opgaven, zoo beperkt is. Dat is natuurlijk nog zoo en dat merkt men ook wel ondanks de duidelijke zorg, die aan de vraagstukken voor het schriftelijk werk wordt besteed en het streven er opgaven bij te voegen, waarvan de behandeling theoretisch inzicht vereischt. Inderdaad is er hier, als ik goed zie, een belangrijk deel, dat zich weinig leent voor schriftelijke opgaven, eensdeels wegens den aard der stof, anderdeels omdat de wijze van behandeling grootendeels aan het inzicht van den leeraar moet worden overgelaten en gelijke opgaven voor alle scholen daardoor weinig op hun plaats zijn. Ik heb verder den indruk, dat aan quaesties over eenhedenstelsels, die m.i. eer bij de natuurkunde thuis hooren, van den mechanicatijd een wat te groot deel wordt besteed.

M.H. Ik vrees, dat velen van U geneigd zullen zijn, de juistheid van mijn waarnemingen, vooral die over algebra en goniometrie in twijfel te trekken. Het zou, geloof ik, voor U van groote waarde zijn, als U die zelf kondt controleeren, ik zie echter geen eenvoudig middel, om dat te verwezenlijken. Ik beveel echter dat punt zeer in Uw aandacht aan. U zult stellig ook andere Delftsche hoogleeraren bereid vinden, U van tijd tot tijd over hun indrukken mededeeling te doen. Ik geloof, dat wij op deze wijze tot een samenwerking kunnen komen, die zoowel voor het middelbaar als voor het hooger onderwijs vruchten kan afwerpen.

Bij de discussie wijst de Heer Dr. Beth Sr. op het feit, dat toch iedereen zijn taal moet beheerschen. Dit is een eisch, die men heusch niet alleen aan studenten moet stellen. Ook de kwestie van het „er om heen praten" bij een antwoord is toch ook voor niet-studenten van belang. Hij ziet hierin geen argumenten tegen het samenbrengen van toekomstige studenten en leerlingen, die voor verschillende maatschappelijke betrekkingen worden opgeleid in één onderwijsinrichting. Ten slotte is spr. geschrokken van de ontstellende resultaten en vraagt hij zich af, of we er dan maar niet beter uit zouden scheiden.

Prof. Bremekamp stemt met de twee eerste opmerkingen in; hij heeft deze dingen echter niet als argumenten tegen dat samenbrengen aangevoerd. Hij zou zelfs willen voorstellen, thans geen uitvoerige discussie over dat punt te beginnen en wil zich dus beperken tot de opmerking, dat voorbereiding voor Hooger Onderwijs nu eenmaal andere eischen stelt dan die voor maatschappelijke

betrekkingen. Wat het derde punt betreft, hij had verwacht, dat zijn mededeelingen een ontstellende indruk zouden maken; zijn bedoeling is echter juist geweest, op te wekken tot het streven naar verbetering der resultaten. Spr. meent, dat de docenten van het M.O. gebaat zouden zijn, als ze zelf de resultaten in Delft eens zouden zien. Spr. stelt de vraag, of er niet geregeld contact tusschen Hooger en Middelbaar Onderwijs kan zijn, opdat de Heeren van het M.O. weten, wat er ontbreekt. Het groote verschil tusschen de resultaten van het eindexamen en het propaedeutisch examen te Delft kan spr. zonder meer niet verklaren.

Dr. Wieringa wijst er op, dat ontstellende resultaten ook op de H.B.S. zich voordoen. Als voorbeeld haalt spr. aan, hoe een klas bij zijn natuurkunde-collega met een vierkantsvergelijking had zitten knoeien. Om de zaak te controleeren, had spr. in een volgende les door diezelfde klasse een aantal vierkantsvergelijkingen, tot de meest „griezelige" toe op laten lossen en de uitkomst was zeer bevredigend. Zelf herinnert spr. zich nog, hoe wijlen Dr. Jensema, die destijds zijn leeraar bij de mechanica was, uitriep: „O, zit het laatje van de goniometrie weer toe?" Spr. werpt verder de schuld op de enorme verzwaring van de eischen voor het eindexamen. De leerlingen hebben tegenwoordig veel minder oefening.

Prof. Bremekamp merkt op, dat waarnemingen, zooals de Heer Wieringa meedeelt, reeds dikwijls zijn gedaan. Ook in Delft doet hetzelfde verschijnsel zich voor. Inderdaad is op die manier heel wat te verklaren; men moet echter z.i. de specialisatie op den leeraar bestrijden. Wat de kwestie van de leerstof aangaat, moet men niet alleen kappen. Er moet evolutie zijn. Spr. verwacht beter resultaat, als men naar meer gelijksoortige leerlingen streeft. Oefening is echter onder alle omstandigheden noodig.

Dr. Bakker wijst er op, dat spr. gezegd heeft, dat men zich eigenlijk doorloopend de vraag moet stellen, of een leerling geschikt is voor verdere studie. De inleider heeft zich hierbij ook bezig gehouden met de A-afdeeling, die misschien in deze zaak een oplossing zou kunnen brengen, om daarin minder geschikte leerlingen onder te brengen. Is spr. bekend, dat de leeraren bij de bevordering van de derde naar de vierde klasse geen rekening mogen houden met het feit, dat een leerling naar een A-afdeeling gaat?

Prof. Bremekamp kent die kwestie bij de α- of β-afdeeling van de Gymnasia en is dus ook met de moeilijkheden er van op de

hoogte. Hij heeft echter op de A-afdeeling slechts gewezen, omdat die onder de tegenwoordige omstandigheden wellicht uitkomst uit moeilijkheden kan geven. Het is niet zijn bedoeling van de A-afdeeling een „vuilnisbak" te maken.

Dr. Wansink zag gaarne meer recht aan de commissie-Beth gedaan. Tevens vraagt hij, hoe de lijst der tekortkomingen is ontstaan.

Prof. Bremekamp merkt eerst op, dat de lijst der tekortkomingen ontstaan is naar indrukken van waarnemingen gedurende vele jaren gedaan, zonder hiervan echter aanteekening te houden, hoe vaak een bepaalde fout gemaakt is. Wat de commissie-Beth betreft, heeft spr. geen verwijt gemaakt. Terecht dringt deze er op aan, dat we meer op begrijpen gericht onderwijs moeten geven; de eigenlijk onvoldoende leerlingen hebben echter de practijk bepaald. Terwijl de commissie-Beth juist beoogde „begrijpen en kunnen" naar voren te brengen, is spr. geneigd te gelooven, dat het resultaat zal zijn: „weten en van buiten kennen". Het is dit, dat spr. heeft doen zeggen: „Er is hier een conflict tusschen theorie en practijk, waarbij de commissie-Beth merkwaardigerwijs aan de kant van de theorie staat."

Dr. Staring heeft de indruk, dat de Delftsche hoogleeraren niet geporteerd zijn voor de veranderingen in het wiskundeleerplan. Hij herinnert zich echter, hoe hij ruim dertig jaar geleden in Delft zonder eenige notie van limieten aankwam en daar toen maar meteen over hoorde spreken. Waarom verzet men zich eigenlijk in Delft tegen limietrekening? Worden de eischen in Delft niet opgevoerd?

Prof. Bremekamp zegt niet tegen de beginselen van de differentiaal- en integraalrekening op de H.B.S. te zijn, mits daarvoor tijd aanwezig is en het niet ten koste van het meer elementaire deel van het onderwijs gaat. Met het limietbegrip gaat het juist andersom als in de tijd, toen de Heer Staring studeerde. Tegenwoordig hebben de leerlingen het op de H.B.S. al ontmoet en op de colleges in Delft wordt het opnieuw behandeld. Wat het bezwaar aangaande het programma in Delft zelf aangaat, moet spr. opmerken, dat het wiskundeprogram voor het propaedeutisch examen tegenwoordig veel minder dan vroeger omvat.

De Heer Koning merkt op, dat tegenwoordig eerst de theorie komt en daarna de vraagstukken. Vroeger werd een onderwerp

eerst met vraagstukken ingeleid en daarna theoretisch behandeld. Zou verdieping niet mogelijk zijn, door eerst sommen te maken.

Prof. Bremekamp zegt, dat z.i. het begrijpen, waarnaar de H.B.S. moet streven, slechts verkregen kan worden, als de leerlingen door het maken van vele vraagstukken de verschijnselen dikwijls waargenomen hebben.

De Heer van Andel, Inspecteur der Lycea, komt op voor het zuiver beheerschen van de Nederlandsche taal. Hier is een taak voor *alle* leeraren. De docenten in de Wiskunde, de Mechanica en de Natuurkunde kunnen hier ook het hunne toe bijdragen, door de leerlingen b.v. de definities goed te laten zeggen. Maar ook in Delft moet z.i. de eisch van het zich goed in Nederlandsche taal uitdrukken gesteld worden en ook daar moeten de candidaten anders maar afgewezen worden. Wat de kwestie van het verschil in cijfers op de eindexamens en de propaedeutische examens aangaat, ligt hier misschien de schuld in Delft? Wat is er in dat eene jaar toch met de studenten gebeurd? Is het repetitorstelsel te Delft niet een kwaad? Verder komt spr. op voor het afschaffen van de vrijstellingen bij de eindexamens. Bij de eindexamenvraagstukken moet men wel af en toe met wat bijzonders komen, daar anders veel te hooge cijfers ontstaan. Bij een voor alle candidaten geldend mondeling examen zou altijd een zekere correctie op een foutief (te hoog) cijfer veroorzaakt kunnen worden.

Prof. Bremekamp erkent, dat het repetitorsysteem, zooals het thans werkt, schadelijk is voor goed wiskunde-onderwijs. Dit kan echter niet de oorzaak zijn van verschillende fouten, die spr. heeft opgesomd. Het niet kunnen ontbinden van een vorm als $1 + x^3$ lijkt spr. meer voort te spruiten uit het feit, dat dit te weinig beoefend is op de H.B.S. Verder merkt spr. op, dat verbetering wel is te bereiken door samenwerking, echter niet door het aanleggen van statistieken, die aangeven, hoe vaak een bepaalde fout wel voorkomt. Wanneer spr. het werk van de commissie-Beth beschouwt of verschillende artikelen in Euclides leest, krijgt hij vaak de indruk in een andere wereld te leven dan wanneer hij op de eindexamens komt. Dit is de tegenstelling, die er bestaat tusschen theorie en practijk. Uitdrukkelijk vestigt spr. er de aandacht op, dat hij niet de bedoeling heeft het M.O. te kleineeren. Spr. heeft echter de lijst van dikwijls gemaakte fouten gegeven, omdat hij meent, dat het M.O. nog meer kan geven.

De Voorzitter van Wimecos, Dr. Spijkerboer, bedankt vervolgens den inleider hartelijk voor zijn voordracht. Wat de kwestie van het verschil der resultaten op de eindexamens en op de propaedeutische examens aangaat, wijst spr. er op, dat hier misschien een rol speelt het niet onder vaste leiding werken der jonge studenten. Over het onderwerp der vrijstellingen wil spr. liever nog wel eens op een aparte vergadering spreken. De samenwerking met het Hooger Onderwijs tot verbetering van de toestand zal spr. gaarne tot stand zien komen.

INGEKOMEN BOEKEN.

Van P. NOORDHOFF, Groningen—Batavia.

P. WIJDENES, *Algebra voor M.U.L.O.* II B. Examen-uitgave. **13e druk.** 236 blz., geb. . . . . *f* 2,25

P. WIJDENES, *Beknopte Meetkunde* II. **7e druk.** 143 blz. 122 nieuwe figuren, gec. . . . . *f* 1,70

P. WIJDENES en Dr. D. DE LANGE, *Rekenboek voor de H.B.S.* I. **18e druk.** 131 blz. 16 fig., gec. . . . . *f* 1,70

P. WIJDENES en Dr. H. J. E. BETH, *Nieuwe Schoolalgebra* III. **7e druk.** 201 blz. 69 fig., geb. . . . . *f* 2,25

Dr. H. C. SCHAMHARDT, *Mondelinge Staatsexamens* A 1940 *f* 0,80

K. H. W. VISSER, *Analytische Meetkunde, Differentiaal- en Integraalrekening voor de M.T.S.* **2e druk.** 137 blz. 73 fig. *f* 1,90

Prof. Dr. M. VAN HAAFTEN, *Vraagstukken over Levensverzekeringswiskunde.* **2e druk** . . . . *f* 1,75

DE DIFFERENTIAAL- EN INTEGRAALREKENING IN HET MIDDELBAAR ONDERWIJS [1])

DOOR

C. J. ALDERS.

Een onderdeel van het nieuwe wiskunde-programma, dat nog niet in openbare discussie is betrokken, is de leerstof voor de differentiaal- en integraalrekening op de H.B.S. De uitnodiging van ons bestuur om hierover op deze vergadering het woord te voeren heb ik, na enige aarzeling, gaarne aangegrepen, omdat ik de invoering van deze stof met bijzondere instemming heb begroet. Verschil van inzicht over de omvang van de stof zal er natuurlijk wel zijn; als ik dan ook mededeling doe van hetgeen ik sinds acht jaar in de klas bespreek, dan hoop ik, dat U dit wilt zien als een leidraad; uit de discussie zal moeten blijken, wat eventueel weggelaten of toegevoegd moet worden.

Na een grondige behandeling van de begrippen limiet en differentiaal-quotient (waarvoor ik mag verwijzen naar de voordracht van Dr. Gerretsen op de vorige vergadering) kan men de volgende formules afleiden:

1) $y = u \pm v \rightarrow y' = u' \pm v'$.

2) $y = uv \rightarrow y' = u'v + uv'$.

3) $y = cu \rightarrow y' = cu'$ (c is constant).

4) $y = \frac{u}{v} \rightarrow y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

5) $y = u^n \rightarrow y' = nu^{n-1} . u'$.

De eigenschappen 1 t/m 4 worden rechtstreeks afgeleid met behulp van de bijbehorende stellingen over limieten; eig. 5 ontstaat uit eig. 2 door $u = v$ te stellen, daarna door 3 gelijke factoren te beschouwen, en tenslotte de algemene formule door volledige inductie te bewijzen. Daarna kan gemakkelijk aangetoond worden, dat eig. 5 ook geldt voor negatieve gehele waarden, en voor gebroken waarden van n; de eigenschap geldt dan voor alle meetbare

[1]) Voordracht voor de leden van Wimecos op 30 Dec. '40.

waarden van n. Toepassing op de functie $y = x^n$ geeft dan $y' = nx^{n-1}$.

Met behulp van deze vijf eigenschappen kan men dan alle algebraische functies differentiëren. Daarna volgen dan nog de afgeleiden van sin ax en cos ax.

Het voorgaande is voldoende voor de toepassingen van de differentiaalrekening in de mechanica en de natuurkunde. Het lijkt mij echter paedagogisch een grote fout om er dan mee op te houden; het feit, dat men een bepaalde functie kan differentiëren heeft voor een leerling van de Middelbare school heel weinig betekenis, als hij daar verder niets mee kan doen. Ik acht het daarom noodzakelijk het voorgaande toe te passen op het zoeken naar de relatieve extrema van een functie. Ik mag U misschien in enkele woorden aanduiden, hoe ik dit de laatste jaren bespreek.

Uit

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} (h > 0)$$

volgt:

I. Als $f'(x)$ in een interval > 0 is, dan is $f(x)$ stijgend.

II. Als $f'(x)$ in een interval < 0 is, dan is $f(x)$ dalend.

Toegepast op de tweede afgeleide geeft dit:

III. Als $f''(x) > 0$ is, dan is $f'(x)$ stijgend.

IV. Als $f''(x) < 0$ is, dan is $f'(x)$ dalend.

Heeft nu $f(x)$ voor $x = p$ een maximum, dan is $f(x)$ links van $x = p$ stijgend en rechts dalend. Uit I en II volgt dan, dat $f'(x)$ links van $x = p$ positief is, en rechts negatief. Dus moet $f'(p) = 0$ zijn. Dit is dus een noodzakelijke voorwaarde voor een maximum. Evenzo blijkt, dat $f'(p) = 0$ een noodzakelijke voorwaarde is voor een minimum. We onderzoeken nu als volgt:

A. $f'(p) = 0$ en $f''(p) > 0$.

Omdat $f''(p) > 0$ is, is $f''(x)$ links en rechts van $x = p$ in een zeker interval positief. Uit III volgt dan, dat $f'(x)$ links en rechts van $x = p$ stijgend is. En omdat $f'(p) = 0$ is, is dus $f'(x)$ links van $x = p$ negatief, en rechts positief. Uit I en II volgt, dat dan $f(x)$ links van $x = p$ dalend, en rechts stijgend is, dus $f(x)$ heeft voor $x = p$ een minimum.

B. $f'(p) = 0$; $f''(p) < 0$.

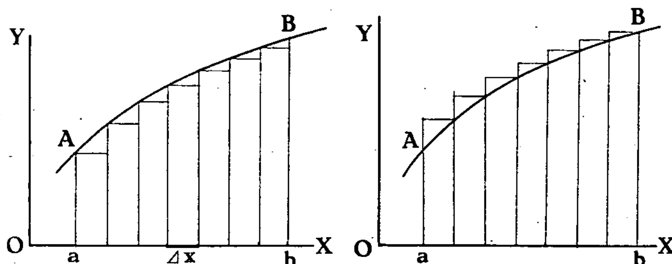
Dit leidt tot een maximum van $f(x)$ voor $x = p$.

C. $f'(p) \doteq 0; f''(p) = 0.$
In dit geval heeft de grafiek van $y = f(x)$ in het algemeen in het betreffende punt een buigpunt.

Het aantal toepassingen van deze eigenschappen op de algebra, de meetkunde en de natuurkunde is zo groot, dat alleen dàarom al de invoering van de differentiaalrekening op de H.B.S. m.i. noodzakelijk is. Het voorgaande is, behoorlijk toegelicht door grafieken, voor de leerlingen van vierde klasse niet te moeilijk; in het algemeen wordt het vrij goed verwerkt; het begin van de stereometrie b.v. is voor de meeste leerlingen veel lastiger.

Ik meen echter, dat het niet gewenst is om meer te doen, dan ik nu aangegeven heb. Het is natuurlijk verleidelijk om b.v. de reeksontwikkeling voor de logarithme en de sinus te bespreken, maar als men dit enigszins dragelijk wil doen, dan kost het zoveel tijd, dat daardoor de rest van het programma in het gedrang komt.

Nu nog een enkel woord over de integraalrekening. Daar de integraal, zowel in de wiskunde als in de natuurkunde, meestal optreedt als de limiet van een som, waarvan de termen onbepaald dicht tot nul naderen, acht ik het gewenst om dit als uitgangspunt te kiezen voor de bespreking in de school. Men kan dit als volgt doen.



We denken ons een functie $y = f(x)$, die in een interval (a, b) eindig, eenwaardig, monotoon, en positief is. Het interval wordt verdeeld in n gelijke delen Δx; de deelpunten noemen we opv. x_0 $(= a)$, x_1, x_2, . . . x_n $(= b)$. Het oppervlak O van de figuur, die begrensd wordt door de boog AB, de ordinaten van de punten A en B en de X-as, is dan groter dan de som

$$S_1 \equiv f(x_0) \Delta x + f(x_1) \Delta x + \ldots f(x_{n-1}) \Delta x,$$

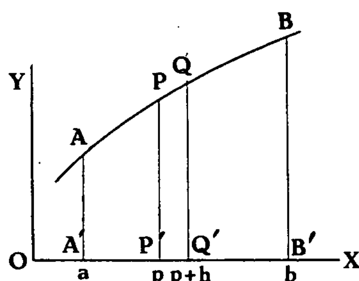
en kleiner dan

$$S_2 \equiv f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \ldots f(x_n)\,\Delta x,$$

dus $S_1 < O < S_2$, waarbij $S_2 - S_1 = [f(b) - f(a)]\,\Delta x$.

Door nu n onbeperkt te laten toenemen, nadert Δx tot nul, dus $\lim\,(S_2 - S_1) = 0$, zodat $O = \lim S_1 = \lim S_2$. We schrijven nu:

$$O = \int_a^b f(x)\,dx.$$



De berekening van deze som gaat dan als volgt:

In het interval (a, b) kiezen we de punten P′ en Q′ met abscissen p en $p + h$; hiermee corresponderen op de grafiek de punten P en Q. Dan is

$$\text{Opp. fig. APP'A'} = \int_a^p f(x)\,dx = \varphi(p).$$

$$\text{Opp. fig. AQQ'A'} = \int_a^{p+h} f(x)\,dx = \varphi(p+h).$$

Dus

$$O' = \text{opp. fig. PQQ'P'} = \int_p^{p+h} f(x)\,dx = \varphi(p+h) - \varphi(p).$$

Nu is $hf(p) < O' < hf(p+h)$, dus

$$f(p) < \frac{O'}{h} < f(p+h) \rightarrow f(p) < \frac{\varphi(p+h) - \varphi(p)}{h} < f(p+h).$$

Dus $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\varphi(p+h) - \varphi(p)}{h} = f(p) \rightarrow \varphi'(p) = f(p)$.

Er zijn oneindig veel functies, waarvan $f(p)$ de afgeleide is, dus $\int_a^p f(x)dx = \varphi(p) + C$.

Stel $p = a \rightarrow 0 = \varphi(a) + C \rightarrow C = -\varphi(a)$, dus

$$\int_a^p f(x)dx = \varphi(p) - \varphi(a), \text{ of } \int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a).$$

Natuurlijk is deze redenering lang niet vlekkeloos, maar voor de eenvoudige functies, die op school besproken worden, kan het

er m.i. wel mee door. De integralen, die men nodig heeft, zijn $\int x^n\,dx$, $\int \sin ax\,dx$ en $\int \cos ax\,dx$, hiermee kunnen al heel wat oppervlakken berekend worden. Verder acht ik van belang de afleiding van de formules voor de inhoud en oppervlakte van een omwentelingslichaam, vooral die voor de inhoud is heel eenvoudig af te leiden na het voorgaande. Hiermee kunnen dan o.a. de oppervlakte en de inhoud van de bol berekend worden. Belangrijk is ook, dat de integraal een paar maal op ongedwongen wijze in de natuurkunde-les gebruikt kan worden, b.v. bij de afleiding van de potentitaal in een punt van het veld van een puntlading, voor de bepaling van de energie van een geladen geleider enz.

Bij de discussie vraagt Dr. Wansink, of het misschien niet goed is, het begrip onbepaalde integraal te elimineren.

De inleider ziet hierin geen voordeel in verband met andere vakken.

Dr. Bottema vraagt naar de berekening der oppervlakte van omwentelingsoppervlakken.

De Heer Alders zegt dit met de formule

$$2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

doen en hiermede in de klasse geen moeilijkheden te hebben.

Dr. E. W. Beth merkt op, dat het voor de afleiding van de fundamentele betrekking

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(x)\,dx = f(x)$$

niet nodig is, de oppervlakte van de bekende figuur op de gebruikelijke wijze door sommen van rechthoeken te benaderen. Men maakt, tenzij men onredelijke eisen van strengheid stelt, de zaak daardoor zonder noodzaak veel te moeilijk. Bij benadering op de door spr. voorgedragen vereenvoudigde wijze verkrijgt men niet meer dan een *schijn* van exactheid; hierover t.z.t. meer in een „Korrel".

De besproken benaderingswijze is niet te ontgaan, wanneer men bepaalde — sedert onheuglijke tijden tot de leerstof behorende — vraagstukken zonder integraalrekening wil oplossen. Het voordeel van de invoering van de integraalrekening is, zolang men het met de strengheid niet al te nauw neemt, juist hierin gelegen, dat de

voor de ll. op zichzelf reeds zeer moeilijke en in vele bijzondere gevallen bovendien zeer omslachtige benaderingsmethode overbodig wordt.

Dr. Bottema is het met den Heer Alders eens.

Prof. Bremekamp merkt op, dat de Heer Alders het begrip bepaalde integraal doet kennen. Men bedenke, dat men met leerlingen te maken heeft. De inleider heeft echter zelf de aandacht er op gevestigd, dat er wel het een en ander aan de strengheid van zijn redenering ontbreekt. Verder wijst Prof. Bremekamp op de toepassing van de integraalrekening bij de inhoudsbepaling der piramide.

Tot slot ziet Dr. Wansink liever de functies sin $(ax + b)$ en cos $(ax + b)$ bij de differentiaalrekening behandeld in plaats van sin ax en cos ax.

Hierna bedankt de Voorzitter Dr. J. Spijkerboer den Heer Alders op hartelijke wijze voor zijn voordracht.

KORRELS.

LIV.

OVER ENIGE EENVOUDIGE FUNCTIES EN HUN GRAFISCHE VOORSTELLING.

I.

Generaliseren en specialiseren zijn van die typische verrichtingen, waaraan de wetenschappelijk ingestelde geest zijn vreugde heeft en voor welker bekoring we gaarne de zin bij onze leerlingen opwekken.

Bij de behandeling van de grafische voorstelling van functies als x^2 en x^3 zullen we allicht tevens spreken over die van x^4 en x^5 en mischien ook eens onderzoeken, hoe die van x^{100} er uitziet. Aardig is het, te ontdekken, hoe de grafiek van zo'n hoge macht zich eerst een heel eind niet merkbaar van de x-as verwijdert om dan plotseling zijn draai te nemen en steil omhoog te schieten! Beschouwen we nu verder ook de grafische voorstelling van $x^{\frac{1}{2}}$, $x^{\frac{1}{3}}$, enz., dan blijkt, dat de grafiek van $y = x^n$ in de oorsprong aan de x-as raakt voor $n > 1$, aan de y-as voor $n < 1$, terwijl we voor $n = 1$ de bissectrix van de hoek tussen de assen krijgen. En nu treedt een andere eigenaardigheid van het wetenschappelijk en meer speciaal van het wiskundig denken naar voren, nl. de neiging om qualitatief verschillende gevallen door geleidelijke quantitatieve verandering uit elkaar te doen voortvloeien. Dit blijkt hier zeer wel te lukken.

Door nl. n van boven of van onder af tot 1 te laten naderen, zien we het stukje, waarover de kromme vlak langs de x- of y-as loopt korter en korter worden en de kromme zich meer en meer aanvlijen tegen de lijn $y = x$, waarin hij voor $n = 1$ overgaat.

In aansluiting aan het bovenstaande kan men bij de goniometrische functies laten tekenen $y = \sin^2 x$ (een sinusoïde, zoals gemakkelijk te bewijzen is door overgang op de dubbele hoek), $y = \sin^3 x$ (géén sinusoïde, maar wèl op te vatten als de som van twee sinusfuncties, immers $4 \sin^3 x = 3 \sin x - \sin 3x$; in dit

verband kan men spreken over de mogelijkheid van de splitsing van een dubbeltoon in twee enkelvoudige tonen en van een lichttrilling in een spectrum van monochromatische trillingen!) en

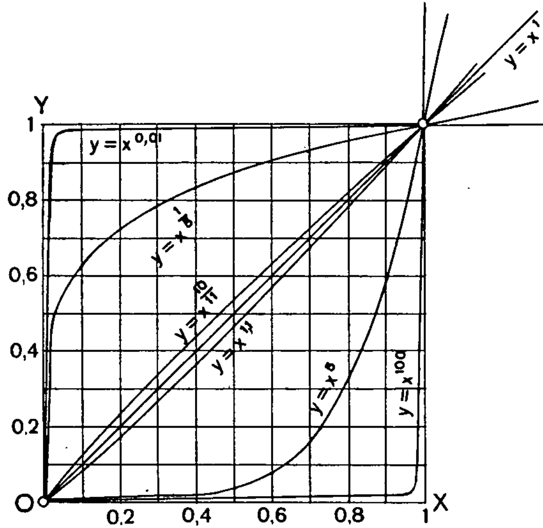


Fig. 1.

wijzen op de eigenaardige vorm van de grafische voorstelling van functies als sin ^{100}x.

II.

Het heeft mij dikwijls lichtelijk gehinderd — en misschien was dit bij menig lezer van dit tijdschrift ook het geval — dat $\int x^n\, dx$ voor $n = -1$ een logarithme levert, terwijl voor alle andere waarden van n machtsfuncties voor den dag komen. Bij nadere beschouwing blijkt het echter mogelijk, de logarithmische functie als grensgeval van een machtsfunctie op te vatten.

We gaan daartoe uit van

$$\int_1^x x^{\varepsilon - 1}\, dx = \frac{1}{\varepsilon}\left(x^{\varepsilon} - 1\right)$$

en laten ε tot 0 naderen. We vinden dan de formule

$$l_n\, x = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left(x^{\varepsilon} - 1\right)$$

Tekenen we de grafiek van

$$y = \frac{1}{\varepsilon}\left(x^{\varepsilon} - 1\right)$$

achtereenvolgens voor $\varepsilon = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, enz., dan zien we hoe deze krommen tot de grafische voorstelling van de logarithme naderen.

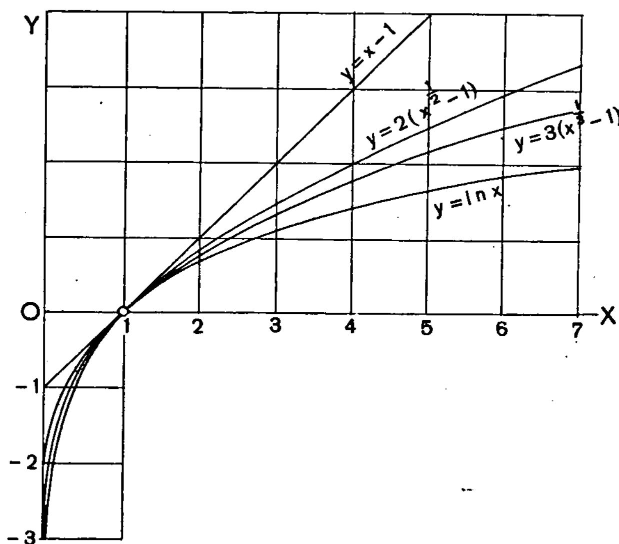


Fig. 2.

Aardig is het hierbij te letten op het raakpunt op de y-as, het snijpunt met de x-as en de raaklijn in dit laatste punt.

Spiegelt men de figuur ten opzichte van de bissectrix van het eerste kwadrant, dan gaat

$$y = \frac{1}{\varepsilon}\left(x^{\varepsilon} - 1\right),$$

dus

$$x = (\varepsilon y + 1)^{\frac{1}{\varepsilon}}$$

over in

$$y = (\varepsilon x + 1)^{\frac{1}{\varepsilon}},$$

of, als we $\frac{1}{\varepsilon} = n$ stellen,

$$y = \frac{(x + n)^n}{n^n},$$

terwijl de grafiek van $y = ln\ x$ de kromme $y = e^x$ tot spiegelbeeld heeft. We zien dus de exponentiële functie e^x als grensgeval voor $n = \infty$ voortkomen uit de machtsfunctie $\frac{(x + n)^n}{n^n}$. Het tekenen en beschouwen van deze spiegelbeelden wordt aan de belangstellende lezers overgelaten.

J. W. DEKKER.

LV.

DE EENPARIGE CIRKELBEWEGING.

Onder de voorbeelden, die we geven bij de behandeling van de dynamica van de eenparige cirkelbeweging, is er een, dat regelmatig de tegenzin van de leerlingen opwekt. Laten we een rechte buis eenparig wentelen om een verticale as, die de buis snijdt, en vragen we naar de plaats, die een stoffelijk punt in de buis moet hebben, opdat het ten opzichte van de buis op zijn plaats blijft gedurende de wenteling, dan vinden we, dat bij een grotere hoeksnelheid ω een plaats behoort, dichter bij de wentelingsas. Ik hoorde van iemand, die de proef op de som nam; hij plaatste een kogeltje in de buis, terwijl deze wentelde en zag, dat het kogeltje boven uit de buis geslingerd werd, zodat de theorie weerlegd scheen.

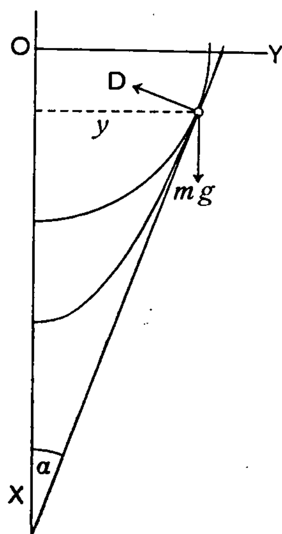


Fig. 1.

Ik zal de drie gewone gevallen, nl. dat van de buis in de vorm van een cirkel met middelpunt op de wentelingsas, van een parabool met de symmetrieas op de wentelingsas en van een rechte, die de wentelingsas snijdt, naast elkaar stellen. De bewegingsvergelijkingen zijn:

$$\begin{cases} mg - D \sin \alpha = 0. \\ D \cos \alpha = m\omega^2 y. \end{cases}$$

Door eliminatie van D:

$$y \operatorname{tg} \alpha = \frac{g}{\omega^2}.$$

Dit resultaat drukt uit, dat de gezochte plaats bepaald wordt door de voorwaarde, dat de subnormaal van de buis in dat punt gelijk is aan $\frac{g}{\omega^2}$.